Alkalmazott statisztika

3. feladatsor: merőleges vetítés

1. Adjunk példát X, Y normális eloszlású véletlen változókra, melyekre $X+Y$ nem normális eloszlású.

Ez mutatja, hogy ez együttes normalitás sokkal több, mint a változónkénti normalitás.

2. Legyen $\mathcal{H} = \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$. Igazoljuk, hogy $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^k x_i y_i$ belső szorzat!

3. Legyen L^2 a négyzetintegrálható véletlen változók Hilbert-tere. Legyenek X, X_1, X_2, ... független standard normálisok, és legyen (a_n) determinisztikus sorozat. Igazoljuk, hogy $S_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ pontosan akkor Cauchy-sorozat L^2-ben, ha $\sum_{i=1}^\infty a_i^2 < \infty$.

4. Az (Y, X_1, X_2) véletlen vektor várható érték vektora $\mathbf{m} = (2, 0, 1)$, kovarianciamátrixa

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az α, β, γ értékeket, melyekre az $\mathbf{E}\left((Y - \alpha X_1 - \beta X_2 - \gamma)^2\right)$ várható érték minimális!

5. Adjuk meg az $\mathbb{R}^2$ téren az $x = y$ egyenesre történő merőleges vetítés mátrixát!

6. Tekintsük az $\mathbf{y} = (1/4, 1/4, 1)^\top$, $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 1/4)^\top$, $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 1/4)^\top$ vektorokat $\mathbb{R}^3$ téren. Milyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ értékekre lesz a $\mathbf{y} - \alpha\mathbf{x}_1 - \beta\mathbf{x}_2$ vektor hossza minimális?

7. Legyen $(Y, X_1, \ldots, X_k)^\top \sim N_{k+1}(\mathbf{m}, \Sigma)$. Határozzuk meg azt a lineáris $t : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvényt, mely minimalizálja a

$$\mathbf{E}\left(Y - t(X_1, \ldots, X_k)\right)^2$$

kifejezést. Igazoljuk, hogy ugyanez a t függvény maximalizálja (a lineáris függvények között) a

$$\mathrm{Corr}(Y, t(X_1, \ldots, X_k))$$

korrelációs együtthatót!