

Alkalmazott statisztika

2. feladatsor: kvantiliztranszformáció

1. Az $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ eloszlásfüggvényhez tartozó kvantilisfüggvény

$$Q(s) = \inf\{x : F(x) \geq s\}, \quad s \in (0, 1).$$

Ha F szigorúan monoton növekvő folytonos függvény, akkor Q éppen F inverze.

Mutassuk meg, hogy $Q(s) \leq x$ pontosan akkor, ha $s \leq F(x)$.

2. *Kvantilis transzformáció.* Legyen U egyenletes eloszlású $[0, 1]$ -en. Ekkor $Q(U)$ véletlen változó eloszlásfüggvénye F , ahol Q az F kvantilisfüggvénye.

3. Határozzuk meg az (a) exponenciális, (b) egyenletes eloszlás kvantilisfüggvényét tetszőleges paraméterek esetén!

4. Határozzuk meg a diszkrét egyenletes eloszlás kvantilisfüggvényét! (Az n -paraméterű diszkrét egyenletes eloszlás $1/n$ valószínűséget rendel az $1, 2, \dots, n$ értékek mindegyikéhez.)

5. *Pareto-eloszlás.* Az $\alpha > 0$ paraméterű Pareto-eloszlás eloszlásfüggvénye $F_\alpha(x) = 1 - x^{-\alpha}$ ha $x \geq 1$, és 0, különben. Határozzuk meg a kvantilisfüggvényt.

6. *Q-Q plot.* Legyen Q_F és Q_G az F és G eloszlásfüggvényekhez tartozó kvantilisfüggvény. Ekkor az F és G egymásra vonatkozó Q-Q plot grafikonja a $\{(Q_F(u), Q_G(u)) : u \in (0, 1)\}$ görbe.

Legyenek F és G folytonos eloszlásfüggvények. Igazoljuk, hogy ha az eloszlásokhoz tartozó elméleti Q-Q plot lineáris, akkor valamilyen a, b számokra $F(ax + b) = G(x)$, minden x -re; azaz a két véletlen változó egymás lineáris transzformáltja.

7. Gondoljuk végig, hogy mit jelent az $X \sim F$ és $Y \sim G$ véletlen változók viszonyára, ha az $F - G$ Q-Q plot a kis értékekre / nagy értékekre az $x = y$ egyenes alatt van?

R 8. Vegyünk mintát különböző eloszlásokból (normális, exponenciális, Cauchy), és vegyük a minta normális szerinti Q-Q plotját (qqnorm). Nézzessük az eredményt!

R 9. Szimuláljunk Pareto-eloszlást a (korábban meghatározott) kvantilisfüggvénye segítségével! Rajzoljuk ki más eloszlásokkal vett Q-Q plotját!

R 10. Szimuláljunk kockadobást! Különböző mintaelemszám esetén ($n = 10, 100, 1000$) adjuk meg és ábrázoljuk a tapasztalati gyakoriságokat és az elméleti valószínűségeket!