A sztochasztika alapjai fizikusoknak

5. feladatsor: nevezetes eloszlások

1. Jelölje S_n a fixpontok számát n elem véletlen permutációja során! Határozzuk meg S_n várható értékét és szórását! (Segítség: Ne próbáljuk meghatározni az eloszlást.)

2. Francia kártyából kihúzunk 20 lapot visszatevéssel. Határozzuk meg a különböző lapok számának várható értékét és szórásnégyzetét!

3. Válasszunk két számot egymástól függetlenül az egyenletességi hipotézis szerint a $(0, 1)$ intervallumból! Adjuk meg a maximum és a minimum együttes eloszlását, és számoljuk ki a kovarianciáját!

4. Egy könyvben az egyes oldalakon a sajtóhubák száma egymástól független, Poisson(2) eloszlást követ. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a 30. és 31. oldalon sincs hiba! Adjuk meg az ezeken az oldalakon található sajtóhubák várható értékét és szórását!

5. Egy augusztusi éjszakán megfigyelhető csillaghullások száma Poisson–eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy egy éjszaka egyetlen hullócsillagot sem látunk 0,1. Várhatóan hány hullócsillag figyelhető meg egy éjszaka?

6. Egy biztosítótársaság felmérte, hogy egy év során egy családi ház 0,0002 valószínűséggel gyullad ki. Mennyi a valószínűsége, hogy 2008-ban egy faluban, ahol 15000 ház van, négynél kevesebb tűz üt ki? (Közelítsünk Poisson–eloszlással!)

7. Egy szövet 100 méterében átlagosan 5 hiba van. Három méteres darabokra vágnak 300 m hosszú szövetet. Várhatóan hány hibátlan darab lesz?

8. Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlású, átlagosan 2 évig működik. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy évig fog működni egy új villanykörte? Mennyi a valószínűsége, hogy legalább még egy évig fog működni egy már fél éve működő? Mennyi időt él meg a villanykörték 90%-a?

9. Anna 30-ik születésnapjára azt a 6 darabos pohárkészletet kapja nagymamájától, mely már 100 éve a család tulajdona. A poharak élettartamai egymástól függetlenek, exponenciális eloszlást követnek 50 év várható értékkel. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy 50 év múlva Anna sértetlenül adhatja tovább unokájának a családi ereklyét (azaz mind a hat poharat)!

10. Egy telefonfülke előtt állunk, és várjuk, hogy az előttünk beszélő befejezze a beszélgetést. Az illető véletlentől függő ideig beszél, az időtartam sűrűségfüggvénye (percben mérve) $e^{-(x/3)}/3$, $x > 0$.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy a beszélgetés 3 percnél tovább tart?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy a beszélgetés $t + 3$ percnél tovább tart, feltéve, hogy t percnél tovább tart?

11. A skót bakák mellkasának körmérete $N(88, 10)$ eloszlást követ. Mekkora hányaduk fér bele 84-es zubbonyba?

12. Egy munkadarabokat készítő gép 40 cm-re van beállítva. A hiba normális eloszlást követ 0 várható értékkel. Annak a valószínűsége, hogy egy munkadarab nagyobb, mint 40,5 cm, 0,05. Mennyi a szórás?

13. A házimacskák testsúlya jó közelítéssel normális eloszlást követ. A macskák 10%-a könnyebb, mint 1,5 kg, és 20%-a nehezebb, mint 7 kg. Mekkora a 6 kg-nál nehezebb macskák aránya?

14. Egy szabályos dobókockát feldobunk 200-szor. Jelölje S_n a dobott hatosok számát. Adjuk meg pontosan, majd a de Moivre– Laplace tétellel közelítve a $\mathbf{P}(30 < S_n \leq 40)$ valószínűséget!

15. Egy szabályos érmével n-szer dobunk. Adjuk meg a $\mathbf{P}(n/2 - c\sqrt{n} < S_n < n/2 + c\sqrt{n})$ valószínűségek közelítő értékét! Mit kapunk a $c \to 0$ ill. $c \to \infty$ esetben?

16. Egy étteremben kétféle menü közül lehet választani. A vendégek 5/6 valószínűséggel A menüt, 1/6 valószínűséggel B menüt választanak. Egy adott napon 500 vendég érkezik. A vendéglős 420 A és 100 B menüt készített elő. Feltételezve, hogy a vendégek egymástól függetlenül választanak, mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jut olyan menü, amilyet kér?

17. Chicago és Los Angeles között két vasútvonal van, melyek mindegyikén egy-egy vonat közlekedik. Mindkét vonat egyidőben indul, lényegében egyformán kényelmes és k személyes. Tegyük fel, hogy 1000 utas egymástól függetlenül $1/2 - 1/2$ valószínűséggel választ vonatot. Legalább mekkora legyen az ülőhelyek k száma, hogy 0,01-nél kisebb legyen annak a valószínűsége, hogy lesz olyan utas, akinek nem jut ülőhely?

18. Budapesten meg akarják állapítani a dohányosok p arányát. Ehhez kiválasztanak n egyént úgy, hogy minden választásnál mindenki ugyanakkora valószínűséggel kerül kiválasztásra, és csak ezek közt nézik meg a dohányosok k számát. Legalább mekkora legyen az n, hogy a kapott $p' = k/n$ arány legalább 0,95 valószínűséggel legfeljebb 0,005 hibával közelítse a valódi p arányt, akármi is $p \in (0, 1)$?

19. Mutassuk meg, hogy két független Poisson–eloszlású véletlen változó összege is Poisson–eloszlású!

20. Valamely növényfajta magjaiból álló mintában a hibás magok száma λ paraméterű Poisson–eloszlású véletlen változó. Minden mintát 3 technikus vizsgál meg egymás után, hogy eltávolítsák a hibás magokat. Az i-edik technikus $p_i < 1$ valószínűséggel veszi észre a hibás magokat; döntései az egyes magokra nézve függetlenek, és az egyes technikusok is egymástól függetlenül döntenek. Határozzuk meg az el nem távolított hibás magok eloszlását!

21. Egy szabályos kockával N-szer dobunk, ahol $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ véletlen változó. Jelölje X_1 az egyesek, X_2 a kettesek számát. Adjuk meg az együttes eloszlást!