

A sztochasztika alapjai fizikusoknak

4. feladatsor: véletlen változók és eloszlásuk; várható érték, szórás

1. Mind a 4 pár különböző cipőmet az előszobában levő beépített szekrényben tartom. Az előszobában kikapott a villany, így sötétben keresgélve véletlenszerűen kivesszek 4 cipőt. Jelölje X a kivett összeillő párok számát! Adjuk meg X eloszlását, várható értékét és szórását!

2. Száz alma közül tíz férges. Véletlenül kiválasztunk ötöt! Adjuk meg a férges almák számának eloszlását!

3. Egy csomag francia kártyát megkevertünk, majd egyesével kihúzzuk a lapokat. Adjuk meg a második ász helyének eloszlását!

4. Egy urnában 101 golyó van, közülük pontosan három piros. A golyókat visszatevés nélkül egyesével kihúzzuk. Jelölje X a második piros sorszámát. Adjuk meg X eloszlását!

5. Egy fiókban három pár kesztyű van összekeveredve: az egyik pár fekete, a másik szürke, a harmadik piros. (A három pár kesztyű csak a színében különböző.) A fiókból egyesével elkezdjük kihúzni a kesztyűket úgy, hogy húzás előtt nem nézzük meg a kesztyű színét, és a kihúzott kesztyűket nem tesszük vissza a fiókba. Addig folytatjuk a húzást, amíg lesz két azonos színű kesztyűnk. Határozza meg annak a hat eseménynek a valószínűségét, hogy ehhez 1, 2, 3, 4, 5, illetve 6 kesztyű kihúzására lesz szükség, majd számítsa ki a húzások számának várható értékét!

6. Válasszunk az egységnégyzetben egy pontot véletlenszerűen. Legyen X a pontnak a négyzet határától vett távolsága. Adjuk meg X eloszlás-, sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását!

7. Anna és Szabina minden szerdán fodrászhoz mennek. Anna 2 és 3 óra között, Szabina pedig 2 és fél 3 között végez egy véletlenszerű időpontban, egymástól függetlenül. Egymást megvárják, majd együtt indulnak haza. Jelölje X azt az időt amennyit a hamarabb végző lány vár a másikra! Határozzuk meg X eloszlását, várható értékét és szórását!

8. Húsvétra dobta piacra a Kinder Meglepetés új, matematikusfigurákat tartalmazó Kinder tojásait. Átlagosan minden 4-edik tojás rejt matematikusfigurát. Aladár 10 Kinder tojást kapott. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy Aladár matematikusfigurának örülhet! Adjuk meg Aladár matematikusfigurái számának eloszlását, várható értékét!

9. Határozzuk meg az ötöslottón a találataink számának eloszlását akkor, ha egy szelvényvel játszunk!

10. Határozzuk meg az ötöslottón kihúzott legnagyobb szám eloszlását, várható értékét és szórását!

11. Egy csomag francia kártyát megkevertünk, majd egyesével kihúzzuk a lapokat. Határozzuk meg a második ász sorszámanak eloszlását, várható értékét!
12. A $(0, 1)$ intervallumon találmra kijelölünk három pontot. Határozzuk meg a középső nullától vett távolságának eloszlás- és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását!
13. Földobunk n -szer egy szabályos pénzérmét. Határozzuk meg az F-I, I-F váltások számanak eloszlását!
14. Egy permetező szakaszoló szelep napokban mért élettartamának sűrűségfüggvénye $f(x) = 3000/x^4$, ha $x \geq 10$, 0 különben. Mennyi a valószínűsége, hogy a permetező szakaszoló szelep 20 napot túlél? Határozzuk meg az szelep élettartamának eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását!
15. Legyen a X véletlen változó sűrűségfüggvénye $f(x) = c/x^2$, ha $x > 1$. (a) Határozzuk meg c értékét! (b) Adjuk meg X várható értékét (ha létezik)! (c) Mennyi $\mathbf{P}(X > 4)$? (d) Legyen $Y = 1/X$. Adjuk meg Y eloszlás-, és sűrűségfüggvényét!
16. Milyen a, b értékek esetén lesz eloszlásfüggvény (a) $F(x) = a + b \arctan x$? (b) $F(x) = e^{-a} e^{-bx}$?
17. Az alábbi számsorozatok közül melyek alkotnak valószínűségeloszlást? (a) $p^k q^2$, ahol $p \in (0, 1)$, $q = 1 - p$, $k = 1, 2, \dots$; (b) $\frac{1}{k(k+1)}$, $k = 1, 2, \dots$; (c) $3^k/k! e^{-3}$, $k = 0, 1, 2, \dots$
18. Sűrűségfüggvény-e? (a) $f(x) = I_{(1, \infty)}(x)x^{-2}$; (b) $f(x) = I_{(0, \infty)}(x)\lambda e^{-\lambda x}$, ahol $\lambda > 0$. (c) $f(x) = (\pi(1 + x^2))^{-1}$.
19. Egy dobókockával 10-szer dobunk. Határozzuk meg (a) a kapott hatosok számanak eloszlását! (b) az összeg harmadik momentumát!
20. Egy urnában van 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevés nélkül. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számanak várható értékét és szórásnégyzetét!
21. Egy urnában van 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevéssel. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számanak várható értékét és szórásnégyzetét!
22. Egy szabályos érmével 100-szor dobunk. Jelölje X a különböző FF sorozatok számát. Határozzuk meg X várható értékét és szórását!
23. Válasszunk két számot egymástól függetlenül az egyenletességi hipotézis szerint a $(-1, 1)$ intervallumból! Adjuk meg a két szám maximumának eloszlásfüggvényét!
24. Válasszunk $2n + 1$ pontot egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint a $[0, 1]$ intervallumban. Adjuk meg a középső pont Z eloszlás- és sűrűségfüggvényét!
25. Jelölje S_n n elem véletlen permutációja során a fixpontok számát. Határozzuk meg S_n várható értékét és szórását!