A sztochasztika alapjai fizikusoknak

3. feladatsor: feltételes valószínűség, függetlenség

1. Az 52 lapos francia kártyából kiosztanak 13 lapot. Legyen A az az esemény, hogy pontosan 2 ászt kaptunk. Határozzuk meg a $\mathbf{P}(A|B_i)$ feltételes valószínűségeket, ha (a) B_1 azt jelenti, hogy van legalább egy ászunk; (b) B_2 azt jelenti, hogy a kőr ász nálunk van; (c) B_3 azt jelenti, hogy a kiosztott lapok közül az első ász; (d) B_4 azt jelenti, hogy a kiosztott lapok közül az első a kőr ász.

2. Egy hallgató p valószínűséggel tudja a választ egy kérdésre. Ha nem tudja, akkor az n lehetséges válasz közül véletlenül választ egyet. Mennyi legyen a lehetséges válaszok n száma, hogy az oktató legalább $0,9$ valószínűséggel következtethessen arra a hallgató jó válaszából, hogy a hallgató tudta a választ?

3. Egy kockával addig dobunk, míg először kapunk hatost. Feltéve, hogy a szükséges dobások száma páros, mennyi a valószínűsége, hogy kétszer kellett dobnunk?

4. Anna és Szabina minden szerdán fodrászhoz mennek. Anna 2 és 3 óra között, Szabina pedig 2 és fél 3 között végez egy véletlenszerű időpontban, egymástól függetlenül. Egymást megvárják, majd együtt indulnak haza. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon negyed 3 után indulnak haza? Mennyi ez a valószínűség, ha tudjuk, hogy Anna legalább 10 perccel korábban végzett, mint Szabina?

5. *Doppingteszt.* Kifejlesztenek egy új doppingtesztet, mely a doppingolók 99%-ánál pozitív eredményt ad, azonban a nem doppingoló sportolók 1%-nál is tévesen pozitív eredményt ad. Tegyük föl, hogy a sportolók 1%-a doppingol. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott sportoló (a) doppingtesztje pozitív? (b) doppingolt, ha tudjuk, hogy a doppingtesztje pozitív?

6. Két pénzérme közül az egyik szabályos, a másik cinkelt, $1/4$ valószínűséggel ad fejet. Véletlenszerűen kiválasztjuk az egyiket, majd ezzel kétszer dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy két fejet kapunk? Ha két fejet kapunk, mennyi a valószínűsége, hogy a szabályos érmét választottuk?

7. Tegyük fel, hogy egy alkatrész meghibásodásának valószínűsége a $(t, t+h)$ intervallumban, feltéve, hogy t ideig működött, $a(t)h + o(h)$. Határozzuk meg annak a $p(t)$ valószínűségét, hogy az alkatrész legalább t ideig működött!

8. Elhelyezünk N golyót n dobozba úgy, hogy az összes n^N elhelyezés egyformán valószínű. Feltéve, hogy az első dobozban van golyó, mennyi a valószínűsége, hogy K golyó van benne?

9. Aladár a pénzét három egyforma borítékban tartja. Az elsőben két ezerforintos, a másodikban egy ezer- és egy kétezerforintos, a harmadikban egy ezer és három kétezerforintos van. Aladár találomra kivesz egy borítékot, és onnan egy bankjegyet. Mennyi a valószínűsége, hogy ezerforintost húzott?

10. Egy cukrászdában 3 cukrász A, B és C süt süteményt, és a sütemények 2, 3 illetve 5%-át rontják el. A sütemények 50%-át A, 30 %-át B, 20%-át pedig C készíti. Mennyi a valószínűsége, hogy A sütötte a süteményt, feltéve, hogy az rossz?

11. Egy matematikuscsaládban a fiú megfigyelte, hogy mikor hazaér, az esetek 20%-ában senki nincs otthon, 50%-ában csak az édesanyja, a maradék esetekben pedig mindkét szülője. Tudja, hogy édesanyja az esetek 80%-ában magára zárja az ajtót; ha mindketten otthon vannak, akkor már csak 40%-ban zárják be, de ha nincs otthon senki, szórakozottságból akkor is az esetek 5%-ában nyitva marad az ajtó. A fiú egy délután hazaér, és zárva találja az ajtót. Mekkora a valószínűsége, hogy van otthon valaki?

12. Van n darab urnánk, melyek mindegyikében a fehér és b piros golyó van. Az első urnából kihúzunk egy golyót, áttesszük a másodikba; majd a másodikból húzunk egyet és átrakjuk a harmadikba, $\ldots$. Végül az n-edik urnából húzunk egyet. Jelölje p_n annak a valószínűségét, hogy az utolsó urnából fehér golyót húzunk, feltéve, hogy az elsőből fehéret húztunk. Igazoljuk, hogy $p_n = a/(a+b) + b/(a+b)(a+b+1)^{1-n}$.

13. A sztochasztika tanszék egyik oktatója p valószínűséggel szokott bejönni a tanszékre. Ha ismerőseinek azt mondta, hogy aznap bejön, akkor annak a valószínűsége, hogy pontosan k-an keresik telefonon $\mathrm{e}^{-\mu}\mu^k/k!$, ha pedig azt mondta, hogy nem, akkor $\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$, $k = 0, 1, \ldots$, $0 < \lambda < \mu$. Feltéve, hogy k hívás érkezett, mennyi a valószínűsége, hogy aznap bent volt az oktató? Vizsgáljuk a $k \to \infty$ esetet.

14. Shanille O'Keal büntetőket dobál egy kosárpályán. Az elsőt bedobja, a másodikat nem. Ezek után annak a valószínűsége, hogy egy büntetőt bedob, megegyezik az eddig sikeres dobásainak részarányával. Mi annak a valószínűsége, hogy az első 100 dobásból pontosan 50 sikeres?

15. Legalább hány lottószelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy egy sorsolásnál a telitalálat valószínűsége legalább 1/2 legyen? Legalább hány hétig kell játszani egyetlen szelvénnyel, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer volt telitalálatunk legalább 1/2 legyen?

16. Egy dobókockával tízszer dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első 5 dobás során nincs hatos, B pedig azt, hogy tíz dobás közt nincs egyes. Mekkora az A és a B események valószínűsége? Függetlenek-e A és B?

17. Legyen A önmagától független esemény. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}(A) = 0$ vagy 1!

18. Válasszunk találomra az $1, 2, \ldots, n$ számok közül úgy, hogy mindegyiket $1/n$ valószínűséggel választjuk. Jelölje A_p azt az eseményt, hogy a választott szám p-vel osztható.

(a) Igazoljuk, hogy ha p_1 és p_2 relatív prím és $p_1p_2|n$, akkor A_{p_1} és A_{p_2} függetlenek.

(b) Igazoljuk, hogy $\varphi(n) = n\prod_{p|n}(1-p^{-1})$, ahol $\varphi(n)$ az Euler–féle függvény, azaz $\varphi(n)$ az n-nél kisebb n-hez relatív prím pozitív egészek száma.