A sztochasztika alapjai

6. feladatsor: nevezetes eloszlások, CHT

1. Egy könyvben az egyes oldalakon a sajtóhubák száma egymástól független, Poisson(2) eloszlást követ. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a 30. és 31. oldalon sincs hiba! Adjuk meg az ezeken az oldalakon található sajtóhubák várható értékét és szórását!

2. Egy augusztusi éjszakán megfigyelhető csillaghullások száma Poisson–eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy egy éjszaka egyetlen hullócsillagot sem látunk 0,1. Várhatóan hány hullócsillag figyelhető meg egy éjszaka?

3. Egy biztosítótársaság felmérte, hogy egy év során egy családi ház 0,0002 valószínűséggel gyullad ki. Mennyi a valószínűsége, hogy 2008-ban egy faluban, ahol 15000 ház van, négynél kevesebb tűz üt ki? (Közelítsünk Poisson–eloszlással!)

4. Egy szövet 100 méterében átlagosan 5 hiba van. Három méteres darabokra vágnak 300 m hosszú szövetet. Várhatóan hány hibátlan darab lesz?

5. Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlású, átlagosan 2 évig működik. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy évig fog működni egy új villanykörte? És egy már fél éve működő? Mennyi időt él meg a villanykörték 90%-a?

6. Anna 30-ik születésnapjára azt a 6 darabos pohárkészletet kapja nagymamájától, mely már 100 éve a család tulajdona. A poharak élettartamai egymástól függetlenek, exponenciális eloszlást követnek 50 év várható értékkel. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy 50 év múlva Anna sértetlenül adhatja tovább unokájának a családi ereklyét (azaz mind a hat poharat)!

7. Diszkrét örökifjúból folytonosat. Legyen $X_n \sim \mathrm{Geom}(\lambda/n)$. Határozzuk meg X_n/n határeloszlását, azaz adjuk meg a $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(X_n/n \le x\right)$ határértéket minden $x \in \mathbb{R}$ esetén!

8. Folytonos örökifjúból diszkrétet. Legyen $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ eloszlású véletlen változó. Határozzuk meg $\lfloor X \rfloor$ eloszlását! (A geometriai eloszlás a diszkrét örökifjú.)

9. A skót bakák mellkasának körmérete $N(88, 10)$ eloszlást követ. Mekkora hányaduk fér bele 84-es zubbonyba?

10. Egy munkadarabokat készítő gép 40 cm-re van beállítva. A hiba normális eloszlást követ 0 várható értékkel. Annak a valószínűsége, hogy egy munkadarab nagyobb, mint 40,5 cm, 0,05. Mennyi a szórás?

11. A házimacskák testsúlya jó közelítéssel normális eloszlást követ. A macskák 10%-a könnyebb, mint 1,5 kg, és 20%-a nehezebb, mint 7 kg. Mekkora a 6 kg-nál nehezebb macskák aránya?

12. Egy szabályos dobókockát feldobunk 200-szor. Jelölje S_n a dobott hatosok számát. Adjuk meg pontosan, majd a de Moivre– Laplace tétellel közelítve a $\mathbf{P}(30 < S_n \leq 40)$ valószínűséget!

13. Egy étteremben kétféle menü közül lehet választani. A vendégek 5/6 valószínűséggel A menüt, 1/6 valószínűséggel B menüt választanak. Egy adott napon 500 vendég érkezik. A vendéglős 420 A és 100 B menüt készített elő. Feltételezve, hogy a vendégek egymástól függetlenül választanak, mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jut olyan menü, amilyet kér?

14. Egy általános iskolában egy és két forintosok gyűjtését hirdetik meg a pénzérmék bevonása előtti fél évben. Megkérik az oda járó diákokat és szüleiket, hogy az otthoni felesleges apórópénzüket az iskolának adják, hogy az így befolyt összegből játszóteret építhessenek az iskolaudvaron. A játszótér megépítéséhez 1,5 millió Ft-ra van szükségük. A gyűjtés során egymillió darab pénzérmét adományoztak az iskolának. Ha ezen pénzérmék mindegyike a többitől függetlenül $1/2 - 1/2$ valószínűséggel egy illetve két forintos, akkor mennyi a közelítő valószínűsége, hogy az igazgatónak legfeljebb 1000 Ft-tal kell hozzájárulnia a játszótér megépüléséhez?

15. Chicago és Los Angeles között két vasútvonal van, melyek mindegyikén egy-egy vonat közlekedik. Mindkét vonat egyidőben indul, lényegében egyformán kényelmes és k személyes. Tegyük fel, hogy 1000 utas egymástól függetlenül $1/2-1/2$ valószínűséggel választ vonatot. Legalább mekkora legyen az ülőhelyek k száma, hogy 0,01-nél kisebb legyen annak a valószínűsége, hogy lesz olyan utas, akinek nem jut ülőhely?

16. Budapesten meg akarják állapítani a dohányosok p arányát. Ehhez kiválasztanak n egyént úgy, hogy minden választásnál mindenki ugyanakkora valószínűséggel kerül kiválasztásra, és csak ezek közt nézik meg a dohányosok k számát. Legalább mekkora legyen az n, hogy a kapott $p' = k/n$ arány legalább 0,95 valószínűséggel legfeljebb 0,005 hibával közelítse a valódi p arányt, akármi is $p \in (0, 1)$?

17. Legyen f folytonos függvény a $[0, 1]$ intervallumon. A hozzátartozó n-edik *Bernstein-polinom* $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$. Igazoljuk, hogy $B_n(f)$ egyenletesen konvergál az f függvényhez, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| = 0.$$

(Segítség: Vegyük észre, hogy $B_n(f)(x) = \mathbf{E}f(S_n/n)$, ahol $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, és $X_1, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású Bernoulli(x) véletlen változók.)