

A sztochasztika alapjai

5. feladatsor: együttes eloszlás, kovariancia

1. Két szabályos kockával játszunk. Jelölje X az első kockával dobott számot és Y a dobott számok nagyobbikát. Adjuk meg az együttes eloszlást, kovarianciát, az összeg várható értékét és szórását!

2. Válasszunk két számot egymástól függetlenül az egyenletességi hipotézis szerint a $(0, 1)$ intervallumból! Adjuk meg a maximum és a minimum együttes eloszlását, és számoljuk ki a kovarianciájukat!

3. Legyen X és Y együttes sűrűsége f , ahol

- (a) $f(x, y) = xe^{-x(1+y)}$, ha $x, y \geq 0$;
- (b) $f(x, y) = 6xy^2$, ha $x, y \in [0, 1]$;
- (c) $f(x, y) = 2xy + x$, ha $x, y \in (0, 1)$;
- (d) $f(x, y) = (x + y)^2 - (x - y)^2$, ha $x, y \in (0, 1)$.

Határozzuk meg a kovarianciamátrixot!

4. Legyen az (X, Y) véletlen vektorváltozó eloszlása egyenletes az egységkörben. Határozzuk meg az együttes eloszlásfüggvényt és a peremeloszlások sűrűségfüggvényeit!

5. Kuponygyűjtő probléma. Egy N különböző elemből álló sokaságból visszatevéses mintát veszünk. Jelölje S_r azt a véletlen számot, ahány elemet kellett húznunk, hogy kapjunk r különböző elemet. Határozzuk meg S_r várható értékét, szórását, majd adjunk ezekre kezelhető aszimptotikus egyenlőséget.

Útmutatás: Vezessük be az $X_k = S_{k+1} - S_k$ változót.

6. Legyen az X és Y véletlen változók együttes sűrűségfüggvénye

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x + xy + y), & \text{ha } (x, y) \in (0, 1)^2, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a peremeloszlásokat!

7. Egy dobókockával az első hatosig dobunk. Jelölje X a szükséges dobások számát, Y pedig a dobott egyesek számát. Adjuk meg az együttes eloszlást és a kovarianciát!

8. Mutassuk meg, hogy két független Poisson-eloszlású véletlen változó összege is Poisson-eloszlású!

9. Valamely növényfajta magjaiból álló mintában a hibás magok száma λ paraméterű Poisson-eloszlású véletlen változó. Minden mintát 3 technikus vizsgál meg egymás után, hogy eltávolítsák a hibás magokat. Az i -edik technikus $p_i < 1$ valószínűséggel veszi észre a hibás magokat; döntései az egyes magokra nézve függetlenek, és az egyes technikusok

is egymástól függetlenül döntenek. Határozzuk meg az el nem távolított hibás magok eloszlását!

10. Egy szabályos kockával N -szer dobunk, ahol $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ véletlen változó. Jelölje X_1 az egyesek, X_2 a kettesek számát. Adjuk meg az együttes eloszlást!

11. Egy városban 200 taxi közlekedik. Telefonon taxit rendelünk, és ha van szabad taxi, akkor a központ a legközelebbit hozzánk küldi. Feltesszük, hogy a taxik egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint helyezkednek el a városban, és mindegyik egymástól függetlenül $2/3$ valószínűséggel foglalt. Továbbá egy taxi helyzete a városon belül független attól, hogy foglalt-e vagy sem. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a legközelebbi szabad taxi 1 km-es körzetünkben legyen (mely nem nyúlik ki a városból), feltéve, hogy van szabad taxi? A város területe $28,26 \text{ km}^2$.

12. A Jonas Brothers nevű együttes újra összeáll és koncertet adnak. A PepsiCo cég a következő ötlettel áll elő: a kólásüvegek kupakjában elrejtik a banda egy-egy tagjának a nevét és azok között, akik összegyűjtik mindhárom nevet kisorsolnak egy VIP belépőt. Kevin neve a kupakok felén szerepel, Joe-val a kupakok egyharmadában találkozhatunk és Nick a legritkább, neve átlagosan minden hatodik kupakban szerepel. Veszünk 10 kólát. Adjuk meg a Joe feliratú kupakok számának várható értékét és szórását! Adjuk meg a Joe feliratú és a Kevin feliratú kupakok számának kovarianciáját és korrelációs együtthatóját!

13. Egy telefonfülke előtt állunk, és várjuk, hogy az előttünk beszélő befejezze a beszélgetést. Az illető véletlentől függő ideig beszél, az időtartam sűrűségfüggvénye (percben mérve) $e^{-(x/3)}/3$, $x > 0$.

- (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a beszélgetés 3 percnél tovább tart?
- (b) Mennyi a valószínűsége, hogy a beszélgetés $t + 3$ percnél tovább tart, feltéve, hogy t percnél tovább tart?

14. Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlású, átlagosan 2 évig működik. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy évig fog működni egy új villanykörte? Mennyi a valószínűsége, hogy legalább még egy évig fog működni egy már fél éve működő? Mennyi időt él meg a villanykörték 90%-a?

15. Anna 30-ik születésnapjára azt a 6 darabos pohárkészletet kapja nagymamájától, mely már 100 éve a család tulajdona. A poharak élettartamai egymástól függetlenek, exponenciális eloszlást követnek 50 év várható értékkel. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy 50 év múlva Anna sértetlenül adhatja tovább unokájának a családi ereklyét (azaz mind a hat poharat)!

16. Legyen X véletlen változó, melyre $\mathbf{E}(X^2) < \infty$. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \mathbf{E}[(X - x)^2]$ az $x = \mathbf{E}X$ pontban veszi föl a minimumát, ami éppen $\mathbf{D}^2(X)$.