A sztochasztika alapjai

3. feladatsor: geometriai valószínűség, feltételes valószínűség, függetlenség

1. A $[0,1]$ intervallumot felosztjuk két véletlenül rádobott ponttal három részre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy (a) mindhárom szakasz hossza nagyobb, mint $1/4$? (b) mindhárom szakasz hossza kisebb mint $1/2$? (c) a szakaszokból háromszög szerkeszthető? (d) a szakaszokból hegyesszögű háromszög szerkeszthető?

2. Választunk egy véletlen számot 0 és 2 között, és egy másikat ettől függetlenül 1 és 2 között. Mennyi a valószínűsége, hogy az összegük kisebb, mint 2?

3. Mátyás vonattal utazik Szegedről Debrecenbe, Cegléden kell átszállnia. A 10:45-kor induló vonat 12:12 és 12:22 között érkezik Ceglédre egyenletes eloszlás szerint, a Budapestről Debrecenbe induló vonat pedig 12:14 és 12:19 között egyenletes eloszlás szerint fut be, és vár Cegléden 2 percet. Mennyi a valószínűsége, hogy Mátyás eléri a csatlakozást? (A vonatok szomszédos vágányra érkeznek, és Mátyás nagyon gyors.)

4. Tekintsünk egy egységnyi kerületű kört, és ennek egy rögzített pontját. Válasszunk további két pontot a körvonalon egymástól függetlenül egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy a három pont által meghatározott háromszög fedi a kör középpontját?

5. Egy egységnégyzet két szemközti oldalán véletlenül választunk egy-egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy távolságuk négyzete kisebb, mint $3/2$?

6. Egy kör kerületén egymástól függetlenül, egyenletesen választunk 4 pontot: A, B, C, D. Mennyi a valószínűsége, hogy az AB és CD húrok metszik egymást? (KöMaL 2012)

7. Egy négyzet belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a választott pont közelebb van valamelyik oldalhoz, mint $1/4$?

8. Egy kör kerületén válasszunk n pontot egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pontok konvex burka tartalmazza a kör középpontját? Mennyi ez a valószínűség, ha a pontokat a kör belsejében választjuk függetlenül, egyenletes eloszlás szerint?

9. Az 52 lapos francia kártyából kiosztanak 13 lapot. Legyen A az az esemény, hogy pontosan 2 ászt kaptunk. Határozzuk meg a $\mathbf{P}(A|B_i)$ feltételes valószínűségeket, ha (a) B_1 azt jelenti, hogy van legalább egy ászunk; (b) B_2 azt jelenti, hogy a kőr ász nálunk van; (c) B_3 azt jelenti, hogy a kiosztott lapok közül az első ász; (d) B_4 azt jelenti, hogy a kiosztott lapok közül az első a kőr ász.

10. Elhelyezünk N golyót n dobozba úgy, hogy az összes n^N elhelyezés egyformán valószínű. Feltéve, hogy az első dobozban van golyó, mennyi a valószínűsége, hogy K golyó van benne?

11. Egy egységnyi hosszú szakaszon találomra választunk kettő pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét pont a szakasz egy előre adott végpontjához van közelebb, ha tudjuk, hogy a két választott pont távolsága kisebb, mint $1/3$?

12. Anna és Szabina minden szerdán fodrászhoz mennek. Anna 2 és 3 óra között, Szabina pedig 2 és fél 3 között végez egy véletlenszerű időpontban, egymástól függetlenül. Egymást megvárják, majd együtt indulnak haza. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon negyed 3 után indulnak haza? Mennyi ez a valószínűség, ha tudjuk, hogy Anna legalább 10 perccel korábban végzett, mint Szabina?

13. Tegyük fel, hogy egy alkatrész meghibásodásának valószínűsége a $(t, t+h)$ intervallumban, feltéve, hogy t ideig működött, $a(t)h + o(h)$. Határozzuk meg annak a $p(t)$ valószínűségét, hogy az alkatrész legalább t ideig működött!

14. Aladár a pénzét három egyforma borítékban tartja. Az elsőben két ezerforintos, a másodikban egy ezer- és egy kétezerforintos, a harmadikban egy ezer és három kétezerforintos van. Aladár találomra kivesz egy borítékot, és onnan egy bankjegyet. Mennyi a valószínűsége, hogy ezerforintost húzott?

15. Egy cukrászdában 3 cukrász A, B és C süt süteményt, és a sütemények 2, 3 illetve 5%-át rontják el. A sütemények 50%-át A, 30 %-át B, 20%-át pedig C készíti. Mennyi a valószínűsége, hogy A sütötte a süteményt, feltéve, hogy az rossz?

16. Vándorlásai közben Odüsszeusz egyszer egy hármas útelágazáshoz ért. Tudta, hogy az egyik út Athénba, a másik Mükénébe, a harmadik pedig Spártába vezet. Azt is tudta, hogy az athéniak átlagosan minden harmadik alkalommal mondanak igazat, a mükénéiek minden második alkalommal, a spártaiak pedig becsületesek, sosem hazudnak. Kockadobással döntötte el, melyik utat válassza, egyforma esélyt adva mindegyiknek. Ezután ment, mendegélt, míg egy városba nem ért. Itt az első szembejövőtől megkérdezte, hogy mennyi kettő meg kettő, és azt a választ kapta, hogy négy. Mennyi a valószínűsége, hogy Athénba érkezett?

17. Shanille O'Keal büntetőket dobál egy kosárpályán. Az elsőt bedobja, a másodikat nem. Ezek után annak a valószínűsége, hogy egy büntetőt bedob, megegyezik az eddig sikeres dobásainak részarányával. Mi annak a valószínűsége, hogy az első 100 dobásból pontosan 50 sikeres?

18. Válasszunk találomra az $1, 2, \dots, n$ számok közül úgy, hogy mindegyiket $1/n$ valószínűséggel választjuk. Jelölje A_p azt az eseményt, hogy a választott szám p-vel osztható.
(a) Igazoljuk, hogy ha p_1 és p_2 relatív prím és $p_1 p_2 | n$, akkor A_{p_1} és A_{p_2} függetlenek.
(b) Igazoljuk, hogy $\varphi(n) = n \prod_{p|n}(1 - p^{-1})$, ahol $\varphi(n)$ az Euler–féle függvény, azaz $\varphi(n)$ az n-nél kisebb n-hez relatív prím pozitív egészek száma.

19. Háromszor feldobunk egy szabályos érmét. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások között fej és írás is előfordul, B pedig azt, hogy legfeljebb egy írás fordul elő. Függetlenek-e A és B?

20. Legalább hány lottószelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy egy sorsolásnál a telitalálat valószínűsége legalább 1/2 legyen? Legalább hány hétig kell játszani egyetlen szelvénnyel, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer volt telitalálatunk legalább 1/2 legyen?

21. Legyenek $x \in [0, 1]$ és $m, n \in \mathbb{N}$. Bizonyítsuk be, hogy $(1-x^n)^m + (1-(1-x)^m)^n \geq 1$.