A sztochasztika alapjai

2. feladatsor: valószínűségek kombinatorikus kiszámítása

1. Az A, B, C, D, E, F kereskedőcégek mindegyike az öt másik céggel kötött egy-egy üzletet az előző hónapban (bármelyik két cég között pontosan egy üzletkötés jött létre). Az ellenőrző hatóság véletlenszerűen kiválaszt a hat cég előző havi (egymás közötti) üzletkötései közül négyet, és azokat ellenőrzi. Mekkora a valószínűsége, hogy az A vagy a B cég üzletkötései közül is ellenőriznek legalább egyet?

2. Tíz pár cipőből véletlenül kiválasztunk négy darabot. Mekkora a valószínűsége, hogy nem lesz egy pár sem?

3. Száz alma közül tíz férges. Véletlenül kiválasztva ötöt, mi a valószínűsége, hogy lesz közte férges?

4. Egy vendéglőben az egyik asztalnál 9 vendég ül. Négyen kólát, hárman sört rendeltek, ketten pedig ásványvizet rendeltek. A kissé feledékeny pincér emlékszik, hogy miből mennyit rendeltek, de azt már elfelejtette, hogy ki mit kért. Ezért véletlenszerűen osztja ki az italokat. Mekkora a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit rendelt?

5. 2008-ban a Bajnokok Ligájában 4 angol (MU, Arsenal, Chelsea, Liverpool), egy olasz (Roma), egy spanyol (Barcelona), egy német (Schalke) és egy török (Fenerbahce) csapat jutott a 8 közé. Sorsolással határozzák meg a negyeddöntők párosítását. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a negyeddöntőben

(a) a Roma elkerüli a MU-t!

(b) az angol csapatok elkerülik egymást!

6. Egy embernek n egyforma kinézetű kulcsa van, melyek közül pontosan egy nyitja az ajtót. Emberünk véletlenül választva sorra próbálja a kulcsokat addig, amíg a jó kulcs elő nem kerül. Valamely $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén mennyi a valószínűsége, hogy a k-adik próbálkozása sikeres, ha

(a) a kipróbált rossz kulcsokat mindig félreteszi?

(b) a kipróbált rossz kulcsokat sose teszi félre?

7. Egy sakktáblán találomra elhelyezünk 8 bástyát. Mi a valószínűsége, hogy egyik sem üti a másikat?

8. Egy kertész három juhar-, négy tölgy- és öt nyírfát ültetett egy sorba véletlen sorrendben, mindegyik fát egyenlő valószínűséggel választva. Mennyi annak a valószínűsége, hogy nem kerül egymás mellé két nyír?

9. Egy dobókockával n-szer dobunk. Mi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege osztható (a) 6-tal? (b) 5-tel?

10. Egy unatkozó gyakorlatvezető dolgozatiratás során arra lett figyelmes, hogy a csoportjában az összes lány egy sorban ül. A csoportban 10 hallgató van, közülük 3 lány. A teremben 4 sor van és minden sorban 4 hely, és feltesszük, hogy mindenki véletlenszerűen választ helyet, azaz minden leülési konfiguráció egyforma valószínűségű. Mennyi a kérdéses esemény valószínűsége?

11. Egy halastóban M aranyhal és K ezüsthal van. Egy horgász addig fogja ki egyesével a halakat, amíg már csak egyszínű hal marad a tóban (tehát vagy csupa aranyhal, vagy csupa ezüsthal). Mennyi a valószínűsége, hogy a Gyuri nevű ezüsthal megússza a horgászkalandot?

12. Egyes vidékeken elterjedt a következő babona: egy lány 6 fűszálat fog a markába úgy, hogy azok a kezéből mindkét irányban kiállnak. Egy másik lány mindkét oldalon páronként összecsomózza a fűszálakat. Ha így egy zárt lánc keletkezik, akkor arra következtetnek, hogy a lány a következő évben férjhez megy. Ha a csomózás teljesen véletlenszerűen történik, mennyi a valószínűsége, hogy zárt láncot kapunk. Mi a helyzet $2n$ fűszál esetén?

13. Egy $n \times n$-es négyzetrács bal alsó és jobb felső sarkába leteszünk egy-egy pókot. A pókok $2n$ lépésben helyet cserélnek úgy, hogy egymástól függetlenül minden útvonalat ugyanakkora valószínűséggel választanak. A pókok egyszerre indulnak, és minden másodpercben egy lépést tesznek. Mi a valószínűsége, hogy a két pók találkozik?

14. A Boltzmann–Maxwell-statisztikánál r golyót úgy helyezünk el n dobozba, hogy mind az n^r elhelyezés egyformán valószínű. Határozzuk meg annak a p_k valószínűségét, hogy pontosan k golyó kerül az első dobozba! Számítsuk ki ezt a határértéket, ha $n \to \infty$ úgy, hogy $r/n \to \lambda$!

Bolyongás. Olyan sorozatokat fogunk vizsgálni, melyek véges sok plusz egyből és mínusz egyből állnak. Tekintsünk az $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sorozatot, melyben p db 1 és q db -1 szerepel, $p + q = n$. Jelölje $s_k = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k$ ezek részletösszegét. Az $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ sorozatot egy törtvonallal ábrázoljuk: a törtvonal k-adik lépésének meredeksége ε_k és k-adik szögpontjának ordinátája s_k. Jelölje $N_{n,x}$ az origóból az (n, x) pontba vezető utak számát.

15. Határozzuk meg $N_{n,x}$ értékét!

16. Tükrözési elv. Legyen $A = (a, \alpha)$, $B = (b, \beta)$, és $A' = (a, -\alpha)$ az A pont x-tengelyre vonatkozó tükörképe. Mutassuk meg, hogy az x-tengelyt érintő vagy átmetsző $A \to B$ utak száma megegyezik az $A' \to B$ utak számával.

17. Ballot–tétel. Legyenek n és x pozitív egészek. Igazoljuk, hogy az origóból az (n, x) pontba vezető olyan $(s_1, s_2, \ldots, s_n = x)$ utak száma, melyre $s_1 > 0, s_2 > 0, \ldots, s_n > 0$ pontosan $\frac{x}{n} N_{n,x}$.

18. Ballot–tétel'. Tegyük fel, hogy egy választás során a P jelölt p számú, a Q jelölt q számú szavazatot kap, ahol $p > q$. Annak a valószínűsége, hogy a szavazatszámlálás során P végig vezetett $(p - q)/(p + q)$.