A sztochasztika alapjai

1. feladatsor: valószínűségi mező, események, szita formula

1. Egy szabályos dobókockával egyszer dobunk. Adjuk meg a kísérletet leíró valószínűségi mezőt! Adjuk meg azt az eseményt és annak valószínűségét, hogy (i) páros számot dobunk; (ii) prímet dobunk; (iii) hatost dobunk!

2. Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk. Adjuk meg a kísérletet leíró valószínűségi mezőt! Adjuk meg azt az eseményt és annak valószínűségét, hogy (i) két hatost dobunk; (ii) dobunk hatost; (iii) mindkétszer páratlan számot dobunk!

3. Egy szabályos érmét tízszer feldobunk. Adjuk meg a kísérlet egy matematikai modelljét! Adjuk meg azt az eseményt és annak valószínűségét, hogy (i) nem dobunk fejet; (ii) az első dobás fej; (iii) pontosan 5 fejet dobunk!

Oldjuk meg a feladatot, ha az érme cinkelt, és a fejdobás valószínűsége p!

4. Adjuk meg a lottóhúzást leíró valószínűségi mezőt! Mennyi annak a valószínűsége, hogy pont 3 találatunk lesz? Mennyi a valószínűsége, hogy lesz találatunk?

5. Fejezzük ki az A, B, C halmazokkal az alábbi eseményeket!

(a) Az A, B, C események közül pontosan $k \in \{1, 2, 3\}$ következik be.

(b) Az A, B, C események közül legalább k következik be.

(c) Az A, B, C események közül legfeljebb k következik be.

6. Igazoljuk az alábbi formulák helyességét!

(a) $A \circ B = (A \cup B) - A \cap B$;

(b) $A \cap (B - C) = A \cap B - A \cap C$;

(c) $A - (A - (B - C)) = A \cap B \cap C^c$;

(d) $A \cup B = A \circ B \circ (A \cap B)$.

7. Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ tetszőleges események. Mit jelent az $A_1 \circ A_2 \circ \dots \circ A_n$ esemény? (A $\circ$ a szimmetrikus differenciát jelöli, azaz $A \circ B = (A - B) \cup (B - A)$.)

8. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n$ események esetén

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \dots + \mathbf{P}(A_n) - (n - 1).$$

9. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A és B eseményre

$$|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Mikor van egyenlőség?

10. Három kockával dobva mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 4? Adjuk meg a kísérletet leíró valószínűségi mezőt, ha 3 különböző kockával dobunk, ill. ha 3 egyformával!

11. Egy pénzügyi befektető cég három cégbe fekteti pénzét, melyek rendre $0,19$, $0,25$, illetve $0,28$ valószínűséggel mennek csődbe az elkövetkező öt évben. Annak a valószínűsége, hogy az első és a második cég is csődbe megy $0,05$, hogy az első és a harmadik is csődbe megy $0,1$, míg hogy a második és a harmadik is becsődöl annak is $0,1$. Annak az esélye, hogy mindhárom cég becsődöl 2%. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) az első vagy a második cég csődbe megy?

(b) egyik cég sem megy csődbe?

12. A Faluvégi Kurta Kocsma előtt 5 bicikli áll. Záróra előtt egymás után jön ki az 5 tulajdonos, és mindegyikük véletlenszerűen választ egy kerékpárt. Mennyi a valószínűsége, hogy senki sem a saját biciklijén jutott haza?

13. Két szabályos kockát r-szer feldobunk. Legyen p_r annak a valószínűsége, hogy az $(1,1),(2,2),\ldots,(6,6)$ mindegyike legalább egyszer előfordul. Határozzuk meg p_r-et!

14. Sorban elhelyezett n dobozba találomra berakunk N golyót úgy, hogy az összes elhelyezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy az első k doboz egyike sem üres?

15. Egy urnában k-féle színű golyó van, mindegyik színűből ugyanannyi darab. Egyenként húzunk a golyókból úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a kihúzott golyót, és minden húzásnál bármelyik golyó ugyanolyan valószínűséggel kerülhet kihúzásra.

(a) Mennyi annak a q_n valószínűsége, hogy legalább n húzás kellett ahhoz, hogy minden szín előforduljon?

(b) Mennyi annak a p_n valószínűsége, hogy n húzás során minden szín előfordult, és ez az n-edik húzásnál következik be először (vagyis az első $(n-1)$ húzás során csak $(k-1)$ szín fordult elő) ?

16. Egy kockát addig dobunk, amíg mind a 6 szám elő nem fordul. Legyen p_n annak a valószínűsége, hogy ez először az n-edik dobás után következik be. Határozzuk meg p_n-et!

17. Három kockával dobva mennyi a valószínűsége, hogy 10-nél nagyobb a dobott számok összege? Adjuk meg a kísérletet leíró valószínűségi mezőt!

18. Egy szabályos kockával 11-szer dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az egymást követő 1, 2, 3, 4, 5, 6 eredménysorozat nem fordul elő?

19. Hét törpe közül Hófehérke leültet ötöt egy kör alakú asztalhoz. Tegyük fel, hogy az összes lehetséges elrendezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy Morgó és Kuka nem kerül egymás mellé?

20. Mekkora a valószínűsége, hogy az ötöslottón kihúzott számok között nem lesznek egymást követők?