Valószínűségszámítás

8. feladatsor: CHT, egyenlőtlenségek és alkalmazásaik

1. Chicago és Los Angeles között két vasútvonal van, melyek mindegyikén egy-egy vonat közlekedik. Mindkét vonat egyidőben indul, lényegében egyformán kényelmes és k személyes. Tegyük fel, hogy 1000 utas egymástól függetlenül $1/2-1/2$ valószínűséggel választ vonatot. Legalább mekkora legyen az ülőhelyek k száma, hogy 0,01-nél kisebb legyen annak a valószínűsége, hogy lesz olyan utas, akinek nem jut ülőhely?

2. Egy szerencsejátékon a nyerési esélyed $1/11$. Ha nyersz, visszakapod a feltett tétet és még nyereményként annak kilencszeresét. Elegendő sok kezdőtőkével indulva ezer alkalommal felteszel 1–1 petákot. Mi a valószínűsége, hogy ezer játszma után még legalább annyi pénzed van, mint kezdetben volt?

3. Budapesten meg akarják állapítani a dohányosok p arányát. Ehhez kiválasztanak n egyént úgy, hogy minden választásnál mindenki ugyanakkora valószínűséggel kerül kiválasztásra, és csak ezek közt nézik meg a dohányosok k számát. Legalább mekkora legyen az n, hogy a kapott $p' = k/n$ arány legalább 0,95 valószínűséggel legfeljebb 0,005 hibával közelítse a valódi p arányt, akármi is $p \in (0,1)$?

4. Legyen X véletlen változó, melyre $\mathbf{E}(X^2) < \infty$. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \mathbf{E}[(X-x)^2]$ az $x = \mathbf{E}X$ pontban veszi föl a minimumát, ami éppen $\mathbf{D}^2(X)$.

5. Weierstrass approximációtétele szerint a polinomok szuprémum normában sűrűn vannak a zárt intervallumon folytonos függvények terében. Az alábbi feladatban erre adunk egy konstruktív bizonyítást.

Legyen f folytonos függvény a $[0,1]$ intervallumon. Az f függvény n-edik *Bernstein-polinoma*

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Mutassuk meg, hogy $B_n(f)$ egyenletesen konvergál az f függvényhez, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| = 0.$$

6. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független $(0,1)$-en egyenletes eloszlású véletlen változók, jelölje $m_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ a minimumukat. Mutassuk meg, hogy

(a) $m_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$;

(b) $\mathbf{P}\{nm_n > x\} \to e^{-x}$.

7. Tegyük fel, hogy az $\{X_n\}$ nemnegatív véletlen változók sorozatára $\mathbf{D}(X_n)/\mathbf{E}(X_n) \to 0$. Mutassuk meg, hogy $X_n/\mathbf{E}(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$.

8. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független Exp(1) eloszlású véletlen változók. Jelölje $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ a véletlen változók maximumát. Igazoljuk, hogy

$$H_n(x) = \mathbf{P}(M_n - \log n \le x) \to H(x) = e^{-e^{-x}}.$$

9. Exponenciálisok minimuma exponenciális. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független exponenciális eloszlású véletlen változók, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ paraméterekkel és jelölje X a minimumukat. Igazoljuk, hogy $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)$, és

$$\mathbf{P}(X = X_k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

10. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_{2n+1}$ független Egyenletes$(0,1)$ eloszlású véletlen változók. Jelölje Y_n a rendezett minta középső elemét. Igazoljuk, hogy

$$Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{1}{2}.$$

11. Határozzuk meg az alábbi határértéket!

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \ .$$

12. Egy városban 200 taxi közlekedik. Telefonon taxit rendelünk, és ha van szabad taxi, akkor a központ a legközelebbit hozzánk küldi. Feltesszük, hogy a taxik egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint helyezkednek el a városban, és mindegyik egymástól függetlenül 2/3 valószínűséggel foglalt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a legközelebbi szabad taxi 1 km-es körzetünkben legyen (mely nem nyúlik ki a városból), feltéve, hogy van szabad taxi? A város területe $28,26\,\mathrm{km}^2$.

13. Legyen $(1-p)p^n$ annak a valószínűsége, hogy egy almafán n virág van, $n = 0, 1, \ldots$. Tegyük fel, hogy minden virágból α valószínűséggel lesz érett gyümölcs. Feltéve, hogy a fán r alma van, mennyi a valószínűsége, hogy n virág volt?

14. Legyen az (X, Y) véletlen vektorváltozó eloszlása egyenletes az egységkörben. Határozzuk meg az Y feltételes sűrűségfüggvényét az $X = x$ feltétel mellett! Számítsuk ki az $\mathbf{E}[Y^2|X = x]$ feltételes várható értéket.

15. Legyenek X, Y független azonos eloszlású véletlen változók, f sűrűségfüggvénnyel. Legyen $U = X \wedge Y$, $V = X \vee Y$. Határozzuk meg a az együttes eloszlásukat, a maximum minimumra vett feltételes sűrűségét, és fordítva, azaz adjuk meg a $g_{U|V}(u|v)$, $g_{V|U}(v|u)$ feltételes sűrűségeket!