Valószínűségszámítás

7. feladatsor: nevezetes eloszlások

1. Húsvétra dobta piacra a Kinder Meglepetés új, matematikusfigurákat tartalmazó Kinder tojásait. Átlagosan minden 4-edik tojás rejt matematikusfigurát. Aladár 10 Kinder tojást kapott. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy Aladár matematikusfigurának örülhet! Adjuk meg Aladár matematikusfigurái számának eloszlását, várható értékét!

2. Egy könyvben, az egyes oldalakon levő sajtóhubák száma Poisson(2) eloszlást követ. Határozzuk meg a sajtóhubák várható értékét és szórását!

3. Egy könyvben az egyes oldalakon levő sajtóhubák száma egymástól független, Poisson(2) eloszlást követnek. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a 30. és 31. oldalon sincs hiba! Adjuk meg az ezeken az oldalakon található sajtóhubák várható értékét és szórását!

4. Egy augusztusi éjszakán megfigyelhető csillaghullások száma Poisson–eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy egy éjszaka egyetlen hullócsillagot sem látunk 0,1. Várhatóan hány hullócsillag figyelhető meg egy éjszaka?

5. Egy biztosítótársaság felmérte, hogy egy év során egy családi ház 0,0002 valószínűséggel gyullad ki. Mennyi a valószínűsége, hogy 2008-ban egy faluban, ahol 15000 ház van, négynél kevesebb tűz üt ki? (Közelítsünk Poisson–eloszlással!)

6. Egy szövet 100 méterében átlagosan 5 hiba van. Három méteres darabokra vágnak 300 m hosszú szövetet. Várhatóan hány hibátlan darab lesz?

7. Legyen X pozitív egész értékű véletlen változó, melyre teljesül a diszkrét örökifjú tulajdonság, azaz

$$\mathbf{P}\{X > k + l | X > l\} = \mathbf{P}\{X > k\}.$$

Mutassuk meg, hogy $X \sim \mathrm{Geom}(p)$!

8. Diszkrét örökifjúból folytonosat. Legyen $X_n \sim \mathrm{Geom}(\lambda/n)$. Határozzuk meg X_n/n határeloszlását, azaz adjuk meg a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right)$$

határértéket minden $x \in \mathbb{R}$ esetén!

9. Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlású, átlagosan 2 évig működik. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy évig fog működni egy új villanykörte? És egy már fél éve működő? Mennyi időt él meg a villanykörték 90%-a?

10. A skót bakák mellkasának körmérete $N(88, 10)$ eloszlást követ. Mekkora hányaduk fér bele 84-es zubbonyba?

11. Egy munkadarabokat készítő gép 40 cm-re van beállítva. A hiba normális eloszlást követ 0 várható értékkel. Annak a valószínűsége, hogy egy munkadarab nagyobb, mint 40,5 cm, 0,05. Mennyi a szórás?

12. Frankenstein professzor vámpír denevéreket tenyészt a laboratóriumában. A denevérek tépőfogainak a hossza normális eloszlást követ $\mu = 28$ mm átlaggal és $\sigma = 4$ mm szórással. Frankenstein tudja, hogy azoknak az állatoknak a harapása halálos, akiknek a tépőfogmérete a populáció felső 5%-ába esik. Számítsuk ki, hogy ez hány mm-es fogméretet jelent!

13. Egy telefonfülke előtt állunk, és várjuk, hogy az előttünk beszélő befejezze a beszélgetést. Az illető véletlentől függő ideig beszél, az időtartam sűrűségfüggvénye (percben mérve) $\mathrm{e}^{-(x/3)}/3$, $x > 0$.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy a beszélgetés 3 percnél tovább tart?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy a beszélgetés $t+3$ percnél tovább tart, feltéve, hogy t percnél tovább tart?

14. Anna 30-ik születésnapjára azt a 6 darabos pohárkészletet kapja nagymamájától, mely már 100 éve a család tulajdona. A poharak élettartamai egymástól függetlenek, exponenciális eloszlást követnek 50 év várható értékkel. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy 50 év múlva Anna sértetlenül adhatja tovább unokájának a családi ereklyét (azaz mind a hat poharat)!

15. Számítsuk ki az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlás ferdeségét és lapultságát! Miért nem függ az eredmény a-tól és b-től?

16. Számítsuk ki a λ paraméterű exponenciális eloszlás ferdeségét és lapultságát!

17. Számítsuk ki az $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ paraméterű normális eloszlás ferdeségét és lapultságát!

18. Tegyük fel, hogy az X véletlen változó örökifjú, azaz tetszőleges $t, s > 0$ esetén

$$\mathbf{P}\left(X > t + s | X > t\right) = \mathbf{P}\left(X > s\right).$$

Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét!

19. Folytonos örökifjúból diszkrétet. Legyen $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ eloszlású véletlen változó. Határozzuk meg $\lfloor X \rfloor$ eloszlását! (A geometriai eloszlás a diszkrét örökifjú.)