Valószínűségszámítás

6. feladatsor: véletlen vektorváltozók, várható érték, kovariancia

1. Egy szabályos kockával n-szer dobunk. Jelölje X_1 az egyesek, X_2 a kettesek számát. Határozzuk meg az együttes eloszlásukat! Határozzuk meg X_1, X_2 kovarianciáját és korrelációját!

2. Egy szabályos kockával N-szer dobunk, ahol $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Jelölje X_1 az egyesek, X_2 a kettesek számát. Adjuk meg az együttes eloszlást! Határozzuk meg X_1, X_2 kovarianciáját és korrelációját!

3. Két szabályos kockával játszunk. Jelölje X az első kockával dobott számot és Y a dobott számok nagyobbikát. Adjuk meg az együttes eloszlást és az összeg várható értékét, szórását!

4. Legyen az (X, Y) véletlen változó. eloszlása egyenletes az egységkörben. Határozzuk meg az együttes eloszlásfüggvényt és a peremeloszlások sűrűségfüggvényeit!

5. Legyen az X és Y véletlen változók együttes sűrűségfüggvénye

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x + xy + y), & \text{ha}(x,y) \in (0,1)^2\,, \\ 0, & \text{különben}\,. \end{cases}$$

Határozzuk meg a peremeloszlásokat!

6. Láttuk, hogy abszolút folytonos véletlen vektorváltozó peremeloszlásai abszolút folytonosak. Igazoljuk, hogy ez nem megfordítható, azaz mutassunk X, Y abszolút folytonos véletlen változókat, melyek együttes eloszlása nem abszolút folytonos!

7. Lássuk be, hogy ha az (X, Y) véletlen vektorváltozó abszolút folytonos, akkor $\mathbf{P}(X = Y) = 0$. Az együttes sűrűségfüggvénnyel írjuk fel a $\mathbf{P}(X \leq Y)$ valószínűséget!

8. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független véletlen változók $F_1, F_2, \ldots, F_n$ eloszlásfüggvénnyel. Adjuk meg $m_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$, $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ véletlen változók eloszlását és együttes eloszlását!

9. Legyen $f(x,y) = c(x+y)$, $0 \leq x, y \leq 1$, egy (X, Y) vektorváltozó sűrűségfüggvénye. Mennyi c értéke? Adjuk meg a peremeloszlásokat, várható érték vektort, kovarianciamátrixot! Számoljuk ki Xe^Y várható értékét!

10. Legyen X és Y független Poisson eloszlású véletlen változó λ illetve μ paraméterrel. Határozzuk meg $X + Y$ és XY várható értékét és szórását, valamint a két változó kovarianciáját.

11. Legyen az X és Y változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = 6\mathrm{e}^{-2x-3y} \quad (x, y > 0)\,,$$

0, különben. Határozzuk meg az együttes és marginális eloszlásfüggvényeket! Adjuk meg a kovarianciamátrixot!

12. Legyen X és Y együttes sűrűsége f, ahol

(a) $f(x, y) = 4xy$, ha $x, y \in (0, 1)$;

(b) $f(x, y) = 6xy^2$, ha $x, y \in [0, 1]$;

(c) $f(x, y) = 2xy + x$, ha $x, y \in (0, 1)$;

(d) $f(x, y) = x\mathrm{e}^{-x(1+y)}$, ha $x, y \geq 0$.

Határozzuk meg a kovarianciamátrixot!

13. Legyen az (X, Y) véletlen vektor sűrűsége $f(x, y) = 3/x^5$, ha $x \geq y \geq 0$, $x \geq 1$. Adjuk meg a kovarianciamátrixot!

14. Legyen $G = (V, E)$ egy egyszerű gráf, és $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a csúcsok egy sorrendje. Minden csúcsra feldobunk egy szabályos érmét, ha az fej akkor a csúcs az A halmazba, különben a B halmazba kerül. Határozzuk meg az A és B halmazok közt futó élek számának várható értékét!

15. A $G = (V, E)$ gráf jó síkra rajzolása egy olyan lerajzolás, ahogy mindenki lerajzol egy gráfot, azaz két él véges sok pontban metszi egymást és egy ponton kettőnél több él nem halad át. Egy gráf metszési száma, $\mathrm{cr}(G)$, a lehető legkevesebb metszést adó jó lerajzolásnál keletkezett metszések száma. Igazoljuk, hogy

$$\mathrm{cr}(G) \geq \frac{e^3}{64v^2},$$

ahol e az élek v a csúcsok száma. (Ajtai, Chvatal, Newborn, Szemerédi)

Útmutatás: Tekintsünk egy véletlen G' részgráfot, melyben minden csúcsot egymástól függetlenül $p \in (0, 1)$ valószínűséggel tartunk meg. Jelölje X a G optimális lerajzolásában a G' metszéseinek számát.(Nyilván $X \geq \mathrm{cr}(G')$.) Határozzuk meg az $\mathbf{E}(v(G')), \mathbf{E}(e(G'))$ és $\mathbf{E}(X)$ értékeket, alkalmazzuk az Euler–tételből adódó $\mathrm{cr}(G) \geq e - 3v + 6$ becslést, végül legyen $p = 4v/e$.

16. Ramsey tételkör. $R(k)$ a legkisebb olyan N, hogy ha egy N csúcsú teljes gráf éleit pirossal és kékkel színezzük, akkor lesz egyszínű k-klikk. Mutassuk meg, hogy $2^{k/2} \leq R(k) \leq 2^{2k}$ (Erdős)!

Megoldás. Színezzünk minden élet egymástól függetlenül $1/2$ valószínűséggel pirosra, $1/2$ valószínűséggel kékre. Válasszunk ki k csúcsot az N-ből. Annak a valószínűsége, hogy ez éppen egy egyszínű k-klikk, $2^{1-\binom{k}{2}}$. Tehát az egyszínű k-klikkek várható értéke $2^{1-\binom{k}{2}}\binom{N}{k}$. Na most, ha ez kisebb, mint 1, akkor szükségképpen van olyan konstrukció, ahol az egyszínű k-klikkek száma 0, azaz ekkor $R(k) > N$. Egyszerű számolás adja, hogy $N = 2^{k/2}$ esetén a várható érték kisebb, mint 1.