

Valószínűségszámítás

5. feladatsor: függetlenség, véletlen változók

1. Legyen A önmagától független esemény. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}(A) = 0$ vagy 1 !
2. Válasszunk taláalomra az $1, 2, \dots, n$ számok közül úgy, hogy mindegyiket $1/n$ valószínűséggel választjuk. Jelölje A_p azt az eseményt, hogy a választott szám p -vel osztható.
 - (a) Igazoljuk, hogy ha p_1 és p_2 relatív prím és $p_1 p_2 | n$, akkor A_{p_1} és A_{p_2} függetlenek.
 - (b) Igazoljuk, hogy

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

ahol $\varphi(n)$ az Euler-féle függvény, azaz $\varphi(n)$ az n -nél kisebb n -hez relatív prím pozitív egészek száma.

3. Legalább hány lottószelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy egy sorsolásnál a telitalálat valószínűsége legalább $1/2$ legyen? Legalább hány hétig kell játszani egyetlen szelvényvel, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer volt telitalálatunk legalább $1/2$ legyen?
4. Egy dobókockával tízszer dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első 5 dobás során nincs hatos, B pedig azt, hogy tíz dobás közt nincs egyes. Mekkora az A és a B események valószínűsége? Függetlenek-e A és B ?
5. Egy dobókockával n -szer dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első m dobás során nincs hatos, B pedig azt, hogy az n dobás közt nincs egyes, $m < n$. Mekkora az A és a B események valószínűsége? Igazoljuk, hogy $\mathbf{P}(A \cap B) < \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.
6. Legyenek $x \in [0, 1]$ és $m, n \in \mathbb{N}$. Bizonyítsuk be (lehetőleg valószínűségi gondolatmenettel), hogy

$$(1 - x^n)^m + (1 - (1 - x)^m)^n \geq 1.$$

7. Eloszlásfüggvények-e a következő függvények?

- (a) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{x}{1+x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$
- (b) $F(x) = e^{-e^{-x}}$.
- (c) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 1 - \frac{1-e^{-x}}{x}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$

8. Az alábbi számsorozatok közül melyek alkotnak valószínűségeloszlást?

- (a) $p^k q^2$, ahol $p \in (0, 1)$, $q = 1 - p$, $k = 1, 2, \dots$;
- (b) $\frac{1}{k(k+1)}$, $k = 1, 2, \dots$;
- (c) $3^k / k! e^{-3}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

9. Sűrűségfüggvény-e?

- (a) $f(x) = (I_{(0,1)}(x) \sin x)/2$;
- (b) $f(x) = I_{(1,\infty)}(x)x^{-2}$;
- (c) $f(x) = I_{(0,\infty)}(x)\lambda e^{-\lambda x}$, ahol $\lambda > 0$.
- (d) $f(x) = (\pi(1+x^2))^{-1}$.

10. Egy embernek n egyforma kinézetű kulcsa van, melyek közül pontosan egy nyitja az ajtót. Emberünk véletlenül választva sorra próbálja a kulcsokat addig, amíg a jó kulcs elő nem kerül. Valamely $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén mennyi a valószínűsége, hogy a k -adik próbálkozása sikeres, ha

- (a) a kipróbált rossz kulcsokat mindig félreteszi?
- (b) a kipróbált rossz kulcsokat sose teszi félre?

11. Adjunk példát olyan F eloszlásfüggvényre, mely tiszta ugrófüggvény, és bármely $a < b$ esetén $F(b) - F(a) > 0$!

12. Ötöslottón egy szelvényvel játszva határozzuk meg a találataink számának eloszlását!

13. Száz alma közül tíz férges. Véletlenül kiválasztunk ötöt! Adjuk meg a férges almák számának eloszlását!

14. Határozzuk meg az ötöslottón kihúzott legkisebb szám eloszlását!

15. Egy csomag francia kártyát megkevertünk, majd egyesével kihúzzuk a lapokat. Adjuk meg a második ás helyének eloszlását?

16. Egy urnában 101 golyó van, közülük pontosan három piros. A golyókat visszatevés nélkül egyesével kihúzzuk. Jelölje X a második piros sorszámát. Adjuk meg X eloszlását!

17. Valamely növényfajta magjaiból álló mintában a hibás magok száma λ paraméterű Poisson-eloszlású véletlen változó. Minden mintát 3 technikus vizsgál meg egymás után, hogy eltávolítsák a hibás magokat. Az i -edik technikus $p_i < 1$ valószínűséggel veszi észre a hibás magokat; döntései az egyes magokra nézve függetlenek, és az egyes technikusok is egymástól függetlenül döntenek. Határozzuk meg az el nem távolított hibás magok eloszlását! (X Poisson-eloszlású λ paraméterrel, ha $\mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$.)

18. Egy szabályos kockával N -szer dobunk, ahol $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Jelölje X_1 az egyesek, X_2 a kettesek számát. Adjuk meg az együttes eloszlást!

19. Mutassuk meg, hogy két független Poisson-eloszlású véletlen változó összege is Poisson-eloszlású!

20. Egy városban 200 taxi közlekedik. Telefonon taxit rendelünk, és ha van szabad taxi, akkor a központ a legközelebbit hozzánk küldi. Feltesszük, hogy a taxik egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint helyezkednek el a városban, és mindegyik egymástól függetlenül $2/3$ valószínűséggel foglalt. Továbbá egy taxi helyzete a városon belül független attól, hogy foglalt-e vagy sem. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a legközelebbi szabad taxi 1 km-es körzetünkben legyen (mely nem nyúlik ki a városból), feltéve, hogy van szabad taxi? A város területe $28,26 \text{ km}^2$.