Valószínűségszámítás

2. feladatsor: Szita formula, kombinatorikus és geometriai valószínűség, vegyes

1. Sorban elhelyezett n dobozba találomra berakunk N golyót úgy, hogy az összes elhelyezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy az első k doboz egyike sem üres?

2. Egy urnában k-féle színű golyó van, mindegyik színűből ugyanannyi darab. Egyenként húzunk a golyókból úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a kihúzott golyót, és minden húzásnál bármelyik golyó ugyanolyan valószínűséggel kerülhet kihúzásra.

(a) Mennyi annak a q_n valószínűsége, hogy legalább n húzás kellett ahhoz, hogy minden szín előforduljon?

(b) Mennyi annak a p_n valószínűsége, hogy n húzás során minden szín előfordult, és ez az n-edik húzásnál következik be először (vagyis az első $(n-1)$ húzás során csak $(k-1)$ szín fordult elő) ?

3. Egy kockát addig dobunk, amíg mind a 6 szám elő nem fordul. Legyen p_n annak a valószínűsége, hogy ez először az n-edik dobásra következik be. Határozzuk meg p_n-et!

4. A Faluvégi Kurta Kocsma előtt 5 bicikli áll. Záróra előtt egymás után jön ki az 5 tulajdonos, és mindegyikük véletlenszerűen választ egy kerékpárt. Mennyi a valószínűsége, hogy senki sem a saját biciklijén jutott haza?

5. A $[0,1]$ intervallumot felosztjuk két véletlenül rádobott ponttal három részre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

(a) mindhárom szakasz hossza nagyobb, mint $1/4$?

(b) mindhárom szakasz hossza kisebb mint $1/2$?

(c) a szakaszokból háromszög szerkeszthető?

(d) a szakaszokból hegyesszögű háromszög szerkeszthető?

6. Választunk egy véletlen számot 0 és 2 között, és egy másikat ettől függetlenül 1 és 2 között. Mennyi a valószínűsége, hogy az összegük kisebb, mint 2?

7. Válasszuk az X, Y pontokat egymástól függetlenül a $(0,1)$ intervallumban egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy az

$$x^2 + Xx + Y = 0$$

egyenletnek valós gyökei lesznek?

8. András és Betti munkaideje egymástól függetlenül egy-egy du. 4 és 6 közötti egyenletes eloszlású időpontban ér véget. Munkaidejük végeztével mindketten elmennek egy, munkahelyüktől azonos távolságra levő kávézóba, ahol elfogyasztanak egy csésze kávét. András esetében ez 10 perc, Betti esetében 20. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak?

9. Tekintsünk egy egységnyi kerületű kört, és ennek egy rögzített pontját. Válasszunk további két pontot a körvonalon egymástól függetlenül egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy a három pont által meghatározott háromszög fedi a kör középpontját?

10. Egy egységnégyzet két szemközti oldalán véletlenül választunk egy-egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy távolságuk négyzete kisebb, mint 3/2?

11. Egy négyzet belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a választott pont közelebb van valamelyik oldalhoz, mint 1/4?

12. Egy kör kerületén válasszunk n pontot egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pontok konvex burka tartalmazza a kör középpontját? Mennyi ez a valószínűség, ha a pontokat a kör belsejében választjuk függetlenül, egyenletes eloszlás szerint?

13. Mekkora a valószínűsége, hogy az ötöslottón kihúzott számok között nem lesznek egymást követők?

14. Vegyünk két olyan kockát, melyeken annak a valószínűsége, hogy i-t dobunk, p_i, ill. q_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, ahol $p_i, q_i \geq 0$ és $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$ és $\sum_{i=1}^{6} q_i = 1$. Választhatók-e a p_i, q_i valószínűségek úgy, hogy két kockával dobva minden összeg 2-től 12-ig egyformán valószínű legyen?

Bolyongás. Olyan sorozatokat fogunk vizsgálni, melyek véges sok plusz egyből és mínusz egyből állnak. Tekintsünk az $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sorozatot, melyben p db 1 és q db -1 szerepel, $p+q = n$. Jelölje $s_k = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k$ ezek részletösszegét. Az $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ sorozatot egy törtvonallal ábrázoljuk: a törtvonal k-adik lépésének meredeksége ε_k és k-adik szögpontjának ordinátája s_k. Jelölje $N_{n,x}$ az origóból az (n, x) pontba vezető utak számát.
15. Határozzuk meg $N_{n,x}$ értékét!

16. Tükrözési elv. Legyen $A = (a, \alpha)$, $B = (b, \beta)$, és $A' = (a, -\alpha)$ az A pont x-tengelyre vonatkozó tükörképe. Mutassuk meg, hogy az x-tengelyt érintő vagy átmetsző $A \to B$ utak száma megegyezik az $A' \to B$ utak számával.

17. Ballot–tétel. Legyenek n és x pozitív egészek. Igazoljuk, hogy az origóból az (n, x) pontba vezető olyan $(s_1, s_2, \ldots, s_n = x)$ utak száma, melyre $s_1 > 0, s_2 > 0, \ldots, s_n > 0$ pontosan $\frac{x}{n} N_{n,x}$.

18. Ballot–tétel'. Tegyük fel, hogy egy választás során a P jelölt p számú, a Q jelölt q számú szavazatot kap, ahol $p > q$. Annak a valószínűsége, hogy a szavazatszámlálás során P végig vezetett $(p - q)/(p + q)$.

A továbbiakban a fent leírt törtvonalra úgy gondolunk, mint egy bolyongó részecske pályájára. Jelölje $X_1, X_2, \ldots$ az egyes lépéseket és $S_k = X_1 + \cdots + X_k$. Feltesszük, hogy a részecske n lépése során előforduló 2^n útvonal egyformán valószínű.
19. Mennyi $\mathbf{P}(S_n = r)$ valószínűség? Legyen $u_{2k} = \mathbf{P}(S_{2k} = 0)$ és $f_{2k} = \mathbf{P}(S_2 \neq 0, \ldots, S_{2k-2} \neq 0, S_{2k} = 0)$. Határozzuk meg u_n-et, és igazoljuk, hogy

$$u_{2n} = f_2 u_{2n-2} + f_4 u_{2n-4} + \cdots + f_{2n} u_0.$$

20. Annak a valószínűsége, hogy az origóba való visszatérés nem következik be a $(2n)$-edik időpillanatig az ugyanannyi, mint annak a valószínűsége, hogy a $(2n)$-edik időpillanatban a részecske visszatért az origóba.