

A sztochasztika alapjai

statisztika

1. Egy játék fizikai terhelhetőségére elvégzett tesztek kg-ban a következő eredményeket adták: 40, 45, 40, 42, 36. A minta alapján adjuk meg a terhelhetőség empirikus eloszlásfüggvényét, mintaátlagát, és empirikus szórásnégyzetét!

2. Legyenek X_1, \dots, X_n független, Egyenletes($0, \theta$) eloszlású véletlen változók, ahol $\theta > 0$. Határozzuk meg $X_{n,n} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ eloszlás-, és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását!

Mutassuk meg, hogy

$$T_1(\mathbf{X}) = \frac{n+1}{2n} X_{n,n}$$

torzítatlan becslése $(\theta/2)$ -nek, ami hatásosabb, mint a \bar{X}_n mintaátlag! Igazoljuk, hogy T_1 gyengén konzisztens!

3. Legyenek X_1, \dots, X_n független, Egyenletes($0, \theta$) eloszlású véletlen változók, ahol $\theta > 0$. Határozzuk meg $X_{1,n} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ eloszlás-, és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását!

Mutassuk meg, hogy

$$T_2(\mathbf{X}) = \frac{X_{1,n} + X_{n,n}}{2}$$

torzítatlan becslése $(\theta/2)$ -nek. Igaz, hogy T_2 hatásosabb, mint a \bar{X}_n mintaátlag, vagy mint T_1 az előző feladattól? Igazoljuk, hogy T_2 gyengén konzisztens!

4. Még mindig egyenletes eloszlás. Legyenek X_1, \dots, X_{2n+1} független, Egyenletes($0, \theta$) eloszlású véletlen változók, ahol $\theta > 0$. Jelölje Y a nagyság szerint középső mintaelemet. Határozzuk meg Y eloszlását, várható értékét és szórását! Igazoljuk, hogy Y konzisztens becslése a $\theta/2$ -nek!

5. Legyenek X_1, \dots, X_n független, azonos eloszlású véletlen változók, melyek közös eloszlásfüggvénye F_θ , várható értéke $\mu(\theta)$, a szórásnégyzete σ^2 . A szórásnégyzet ismert, a várható értéket becsljük a mintaátlaggal. Legalább mekkora legyen n , hogy

$$\mathbf{P}_\theta (|\bar{X}_n - \mu| > 0,01) \leq 0,01.$$

Használjuk a Csebisev-egyenlőtlenséget! És ha normális közelítést használunk?

6. Egy gyárban a termékek minőségét úgy ellenőrzik, hogy minden nap n terméket vizsgálnak meg. Az adott napi összes gyártmányt akkor fogadják el, ha minden megvizsgált gyártmány jó. Azt tapasztalták, hogy m nap alatt összesen x -szer fogadták el a napi gyártmányokat. Adjunk maximum likelihood becslést annak a valószínűségére, hogy egy termék selejtes!

7. Mendel törvényei szerint egy növény AA, AB, BB genotípusa rendre θ^2 , $2\theta(1 - \theta)$, $(1 - \theta)^2$ arányban fordul elő. Egy területen a három gyakoriságra x_{AA} , x_{AB} , és x_{BB} adódott. Adjunk maximum likelihood becslést θ -ra! Mutassuk meg, hogy a kapott becslés torzítatlan!

8. A szintévesztés leggyakoribb fajtája az X kromoszómához kapcsoltn, nemhez kötötten öröklődik. Emiatt a férfiaknál a gyakoriság p , míg a nőknél csak p^2 . Adjunk maximum likelihood becslést p -re, az alapján, hogy M férfiból m , N nőből pedig n volt szintévesztő!

9. Egy almáskertben véletlenszerűen, egymástól függetlenül találhatók fertőzött fák. Tíz egyforma nagy, egyenként három sorból álló ültetvényben rendre 0, 3, 0, 1, 0, 0, 2, 1, 1, 2 beteg fát találtak. Adjunk maximum likelihood becslést az egy sorban található fák számának várható értékére! Használjunk Poisson-eloszlást!

10. Egy tóban a halakat egy betegség támadta meg, mely ismert p valószínűséggel pusztítja el az egyes egyedeket. A kifogott haltetek k számából adjunk maximum likelihood becslést a betegség előtt a tóban élt halak számára!

11. Családok jövedelmét egy olyan skálán mérjük, ahol $X = 1$ a létminimumnak felel meg. Feltételezzük, hogy a jövedelem eloszlása $f(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}}$, $x \geq 1$, sűrűségfüggvénnyel adható meg. Adjunk maximum likelihood becslést θ -ra, ha 10 véletlenszerűen választott család jövedelme: 1,53, 2,76, 19,65, 4,16, 7,31, 1,21, 254,2, 5,43, 1,12, 1,63.

12. Egy adott típusú izzó élettartama exponenciális eloszlású θ várható értékkel. Tegyük fel, hogy az 5 izzónál a 2,3, 4, 1,7, 3,2, 2,8 élettartamokat figyeltük meg. Adjunk ML becslést θ -ra!

13. Egy alkatrész élettartama exponenciális eloszlású θ/t várható értékkel, ha t hőmérsékleten működtetjük. Tegyük fel, hogy az n megfigyelést t_1, \dots, t_n hőmérsékleten végeztük és x_1, \dots, x_n élettartamokat figyeltünk meg. Adjunk ML becslést θ -ra!

14. Augusztusban 5 éjszakán át figyeltük meg a hullócsillagok számát. A következő mintát kaptuk: 4, 3, 7, 2, 4. A hullócsillagok száma egy este Poisson-eloszlású. Adjunk ML becslést az eloszlás paraméterére!

15. Egy céllövő ismeretlen p valószínűséggel talál el egy célpontot. Adjunk ML-becslést p -re, ha az első sikeres lövés k -adikra következett be. Torzítatlan-e a kapott becslés? A második sikeres lövésre további ℓ lövésig kellett várni. Ezt figyelembe véve adjunk ML-becslést p -re!

16. Legyenek X_1, \dots, X_n független véletlen változók, $f(x) = \frac{2x}{3\theta^2}$, $\theta \leq x \leq 2\theta$, sűrűségfüggvénnyel. Adjunk becslést θ -ra momentum módszerrel és ML módszerrel is! Torzítatlan-e, ill. aszimptotikusan torzítatlan-e a kapott becslés?