

Rab matematikusok és véletlen permutációk

Kevei Péter

SZTE Bolyai Intézet
Sztochasztika Tanszék

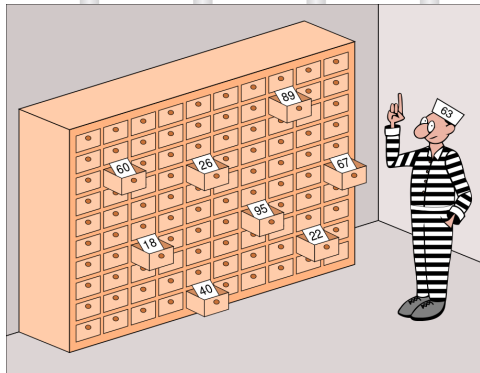
π nap
2026. $[100\pi]/100$

100 rab problémája

100 halálraítélt, 1-től 100-ig megszámozott rabnak a börtönigazgató ad egy utolsó esélyt. Az igazgató egy 100 fiókos (ugyan csak 1-től 100-ig számozott) szekrény fiókjaiba beteszi (véletlen sorrendben) a számokat. Minden fiókba pontosan egy szám kerül. Ezután a rabok egyesével bemennek a szobába, ahol ki nyithatnak 50 fiókot. A fiókokat visszacsukják, a szekrényben nem rendezhetik át a számokat, mindent úgy hagynak, ahogy volt. Ha *minden* rab megtalálja a saját számát, akkor kiszabadulnak, különben mindegyiküket kivégzik. (Gál Anna, Peter Bro Miltersen (2003))

100 rab problémája

- ▶ egyesével
- ▶ minden rab pontosan ugyanúgy hagyja a szobát
- ▶ 50 fiókot nyithat ki
- ▶ előtte lehet beszélni
- ▶ utána, közben nem
- ▶ mindenkinek meg kell találnia a számát



Forrás: Wikimedia

1. stratégia

Minden rab véletlenszerűen kinyit 50 fiókot.

1. stratégia

Minden rab véletlenszerűen kinyit 50 fiókot.

Mennyi a szabadulás esélye?

- ▶ Egyetlen rab megtalálja a saját számát: $\frac{1}{2}$

1. stratégia

Minden rab véletlenszerűen kinyit 50 fiókot.
Mennyi a szabadulás esélye?

- ▶ Egyetlen rab megtalálja a saját számát: $\frac{1}{2}$
- ▶ Mind megtalálja: $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} \approx 10^{-30}$

1. stratégia

Minden rab véletlenszerűen kinyit 50 fiókot.

Mennyi a szabadulás esélye?

- ▶ Egyetlen rab megtalálja a saját számát: $\frac{1}{2}$
- ▶ Mind megtalálja: $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} \approx 10^{-30}$
- ▶ 1 szelvénnel 4 héten egymás után telitalálat:

$$\frac{1}{\binom{90}{5}^4} \approx 0,27 \cdot 10^{-30}.$$

Definíció

- ▶ Egy A halmaz permutációján annak önmagára vett bijektív leképezését értjük.

Definíció

- ▶ Egy A halmaz permutációján annak önmagára vett bijektív leképezését értjük.
- ▶ Egy halmaz elemeinek sorbarendezeése. Véges, n elemű halmaz esetén az $\{1, 2, \dots, n\}$ elemeket rendezzük sorba.

Tulajdonságok

- ▶ Permutációk megadása:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

- ▶ n elemű halmaz lehetséges permutációinak száma:
 $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

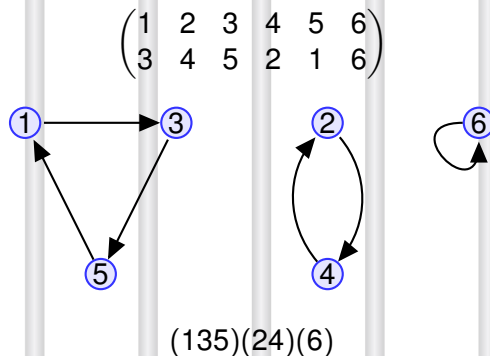
Tulajdonságok

- ▶ Permutációk megadása:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

- ▶ n elemű halmaz lehetséges permutációinak száma:
 $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.
- ▶ ez nagy ($10! = 3628800$, $100! \approx 9 \cdot 10^{157}$)

Ciklusok



2. stratégia

Minden rab először kinyitja a sorszámanak megfelelő fiókot.
Aztán kinyitja azt a fiókot, amelyiknek a sorszámat megtalálta
az előbb, és ezt folytatja.

Példa (6 fiók, 3 próba)

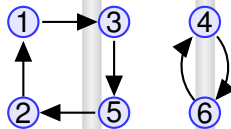
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

- ▶ 1. rab: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$
- ▶ 2. rab: $2 \rightarrow 4$
- ▶ 3. rab: $3 \rightarrow 5 \rightarrow 1$
- ▶ 4. rab: $4 \rightarrow 2$
- ▶ 5. rab: $5 \rightarrow 1 \rightarrow 3$
- ▶ 6. rab: 6 Hurrá!



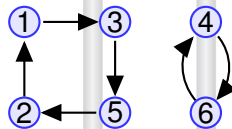
2. Példa (6 fiók, 3 próba)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$



2. Példa (6 fiók, 3 próba)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

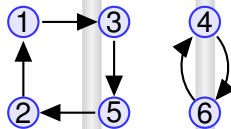


► 1. rab: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ vége

2. Példa (6 fiók, 3 próba)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- 1. rab: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ vége



Szabadulás valószínűsége

Szabadulás valószínűsége

A ciklusstratégia pontosan akkor nyer, ha a leghosszabb ciklus 50-nél nem hosszabb.

Szabadulás valószínűsége

A ciklusstratégia pontosan akkor nyer, ha a leghosszabb ciklus 50-nél nem hosszabb.

Azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus 51:

- ▶ kik vannak a leghosszabb ciklusban:

Szabadulás valószínűsége

A ciklusstratégia pontosan akkor nyer, ha a leghosszabb ciklus 50-nél nem hosszabb.

Azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus 51:

- ▶ kik vannak a leghosszabb ciklusban: $\binom{100}{51} = \frac{100 \cdot 99 \cdot \dots \cdot 50}{51!}$

Szabadulás valószínűsége

A ciklusstratégia pontosan akkor nyer, ha a leghosszabb ciklus 50-nél nem hosszabb.

Azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus 51:

- ▶ kik vannak a leghosszabb ciklusban: $\binom{100}{51} = \frac{100 \cdot 99 \cdot \dots \cdot 50}{51!}$
- ▶ 51 elem azon permutációi, melyben egyetlen ciklus van:

Szabadulás valószínűsége

A ciklusstratégia pontosan akkor nyer, ha a leghosszabb ciklus 50-nél nem hosszabb.

Azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus 51:

- ▶ kik vannak a leghosszabb ciklusban: $\binom{100}{51} = \frac{100 \cdot 99 \cdot \dots \cdot 50}{51!}$
- ▶ 51 elem azon permutációi, melyben egyetlen ciklus van: $50!$

Szabadulás valószínűsége

A ciklusstratégia pontosan akkor nyer, ha a leghosszabb ciklus 50-nél nem hosszabb.

Azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus 51:

- ▶ kik vannak a leghosszabb ciklusban: $\binom{100}{51} = \frac{100 \cdot 99 \cdot \dots \cdot 50}{51!}$
- ▶ 51 elem azon permutációi, melyben egyetlen ciklus van: 50!
- ▶ a maradék 49 elemet tetszőlegesen permutálhatom:

Szabadulás valószínűsége

A ciklusstratégia pontosan akkor nyer, ha a leghosszabb ciklus 50-nél nem hosszabb.

Azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus 51:

- ▶ kik vannak a leghosszabb ciklusban: $\binom{100}{51} = \frac{100 \cdot 99 \cdot \dots \cdot 50}{51!}$
- ▶ 51 elem azon permutációi, melyben egyetlen ciklus van: 50!
- ▶ a maradék 49 elemet tetszőlegesen permutálhatom: 49!

Szabadulás valószínűsége

A ciklusstratégia pontosan akkor nyer, ha a leghosszabb ciklus 50-nél nem hosszabb.

Azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus 51:

- ▶ kik vannak a leghosszabb ciklusban: $\binom{100}{51} = \frac{100 \cdot 99 \cdot \dots \cdot 50}{51!}$
- ▶ 51 elem azon permutációi, melyben egyetlen ciklus van: $50!$
- ▶ a maradék 49 elemet tetszőlegesen permutálhatom: $49!$
- ▶ tehát:

$$\binom{100}{51} 50! \cdot 49! = \frac{100!}{51! 49!} \cdot 50! \cdot 49! = \frac{100!}{51!}.$$

Szabadulás valószínűsége

Hasonlóan, azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus k , $k \geq 51$:

$$\binom{100}{k} (k-1)! (100-k)! = \frac{100!}{k! (100-k)!} \cdot (k-1)! \cdot (100-k)! = \frac{100!}{k}.$$

Szabadulás valószínűsége

Hasonlóan, azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus k , $k \geq 51$:

$$\binom{100}{k} (k-1)! (100-k)! = \frac{100!}{k!(100-k)!} \cdot (k-1)! \cdot (100-k)! = \frac{100!}{k}.$$

Összegezve, azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus legalább 51:

$$100! \left[\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100} \right].$$

Szabadulás valószínűsége

Hasonlóan, azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus k , $k \geq 51$:

$$\binom{100}{k} (k-1)! (100-k)! = \frac{100!}{k!(100-k)!} \cdot (k-1)! \cdot (100-k)! = \frac{100!}{k}.$$

Összegezve, azon permutációk száma, melyben a leghosszabb ciklus legalább 51:

$$100! \left[\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100} \right].$$

Tehát, annak a valószínűsége, hogy a leghosszabb ciklus legalább 51:

$$\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}$$

Szabadulás valószínűsége

Annak a valószínűsége, hogy a leghosszabb ciklus legalább 51:

$$\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy a leghosszabb ciklus nem hosszabb, mint 50,

$$1 - \left[\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100} \right],$$

ami éppen a szabadulás valószínűsége.

Szabadulás valószínűsége

Annak a valószínűsége, hogy a leghosszabb ciklus legalább 51:

$$\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy a leghosszabb ciklus nem hosszabb, mint 50,

$$1 - \left[\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100} \right],$$

ami éppen a szabadulás valószínűsége.
Na és ez mennyi?

Szabadulás valószínűsége

$$\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100} \approx \int_{50}^{100} \frac{1}{x} dx = \ln \frac{100}{50} = \ln 2 \approx 0,69$$

így

$$1 - \left[\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100} \right] \approx 0,31$$

Van jobb?

A ciklus stratégia optimális (Warshauer, Curtin, 2006).

Van jobb?

A ciklus stratégia optimális (Warshauer, Curtin, 2006).

- ▶ Egy változat: Mind a 100 rab egyszerre megy be a szobába. Mindenki addig nyitogat, amíg meg nem találja a számát. Akinek a száma már kijött, az nem csinál semmit. Akkor nyernek, ha mindenki legfeljebb 50 fiókot nyitott ki.

Van jobb?

A ciklus stratégia optimális (Warshauer, Curtin, 2006).

- ▶ Egy változat: Mind a 100 rab egyszerre megy be a szobába. Mindenki addig nyitogat, amíg meg nem találja a számát. Akinek a száma már kijött, az nem csinál semmit. Akkor nyernek, ha mindenki legfeljebb 50 fiókot nyitott ki.
- ▶ A változat a raboknak jobb, mint az eredeti.

Van jobb?

A ciklus stratégia optimális (Warshauer, Curtin, 2006).

- ▶ Egy változat: Mind a 100 rab egyszerre megy be a szobába. Mindenki addig nyitogat, amíg meg nem találja a számát. Akinek a száma már kijött, az nem csinál semmit. Akkor nyernek, ha mindenki legfeljebb 50 fiókot nyitott ki.
- ▶ A változat a raboknak jobb, mint az eredeti.
- ▶ A változatban a nyerési esély nem függ a stratégiától, és éppen az, amit a ciklusstratégia ad.

Mi történt?

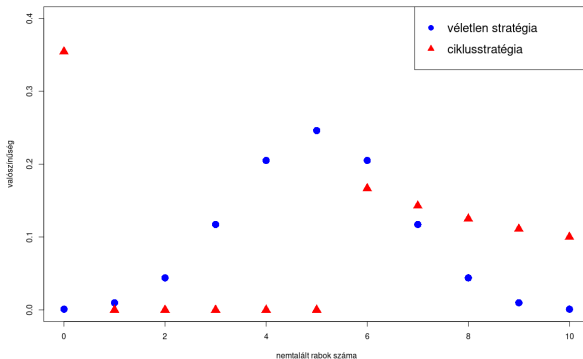
- ▶ Az, hogy egy rögzített rab megtalálja a saját számát, továbbra is $1/2$. Ezt semmilyen stratégia nem befolyásolja, hiszen mindig 50 fiókot nyit ki a 100-ból, és nincs semmilyen információja.

Mi történt?

- ▶ Az, hogy egy rögzített rab megtalálja a saját számát, továbbra is $1/2$. Ezt semmilyen stratégia nem befolyásolja, hiszen mindig 50 fiókot nyit ki a 100-ból, és nincs semmilyen információja.
- ▶ A ciklusstratégia azt éri el, hogy ha legalább egyvalaki nem találja meg a számát, akkor legalább 51-en nem találják meg a számokat. Hiszen a hosszú ciklusban senki nem találja meg. Ezzel szemben, az 1. stratégia esetén lehet, hogy csak egy nem találja meg a számát, az összes többi igen, de ezért is halál jár.

Mi történt?

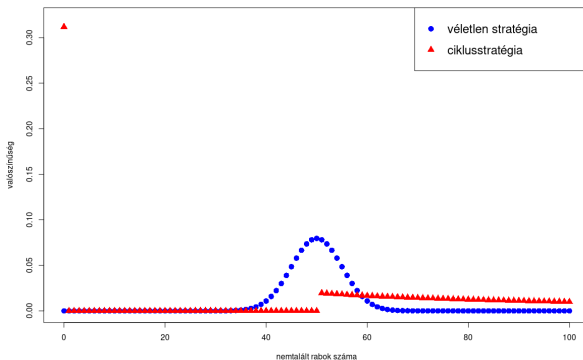
Nemtalált rabok számának eloszlása (10 rab, 5 próba):



Várhatóan mindkét esetben 5 rab nem talál.

Mi történt?

Nemtalált rabok számának eloszlása (100 rab, 50 próba):



Várhatóan mindkét esetben 50 rab nem talál.

Egy határeloszlás-tétel

Tekintsük $\{1, 2, \dots, n\}$ egy véletlen permutációját, és jelölje Y_n a leghosszabb ciklus hosszát. Megmutattuk, hogy

$$\mathbf{P}(Y = k) = \frac{1}{k}, \quad k = [n/2] + 1, [n/2] + 2, \dots, n.$$

Egy határeloszlás-tétel

Tekintsük $\{1, 2, \dots, n\}$ egy véletlen permutációját, és jelölje Y_n a leghosszabb ciklus hosszát. Megmutattuk, hogy

$$\mathbf{P}(Y = k) = \frac{1}{k}, \quad k = [n/2] + 1, [n/2] + 2, \dots, n.$$

Tehát, ha $x \in (1/2, 1)$

$$\mathbf{P}(Y \geq nx) = \sum_{k=[nx]}^n \frac{1}{k} \sim -\ln x,$$

másképpen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{Y_n}{n} \leq x\right) = 1 + \ln x, \quad x \in [1/2, 1].$$

Fixpontok száma

Tekintsük $\{1, 2, \dots, n\}$ egy véletlen permutációját, X_n a fixpontok száma. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots \quad \text{Poisson}(1)$$

Speciálisan

$$\mathbf{P}(\text{nincs fixpont}) \approx e^{-1} = 0,368.$$

Fixpontok száma

Tekintsük $\{1, 2, \dots, n\}$ egy véletlen permutációját, X_n a fixpontok száma. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots \quad \text{Poisson}(1)$$

Speciálisan

$$\mathbf{P}(\text{nincs fixpont}) \approx e^{-1} = 0,368.$$

Ha $X_n(\ell)$ az ℓ hosszú ciklusok száma, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n(\ell) = k) = \frac{e^{-1/\ell}}{\ell^k \cdot k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Házi feladat

KöMaL B. 5018. A szultán birodalmának mind az 1024 matematikusát börtönbe záratta. Mindegyikük csak a saját réztaléros érméjét tarthatta meg. A matematikusok tudják, hányan vannak, de semmiféle módon nem képesek kommunikálni egymással.

A szultán a születésnapján nagy kegyesen a következő játékot ajánlotta a matematikusoknak: az udvaron egyenként vagy 0-t, vagy 1-et mondanak. Ha a mondott számok összege 1, akkor szabadon bocsátja őket.

(A matematikusok nem adhatnak jelet egymásnak, nem tudják, hogy őket hányadiknak vitték ki, vagy hogy az előttük az udvaron lévők mit csináltak.)

Mekkora eséllyel szabadulhatnak ki a matematikusok?