

Zsonglőrködés matematikája

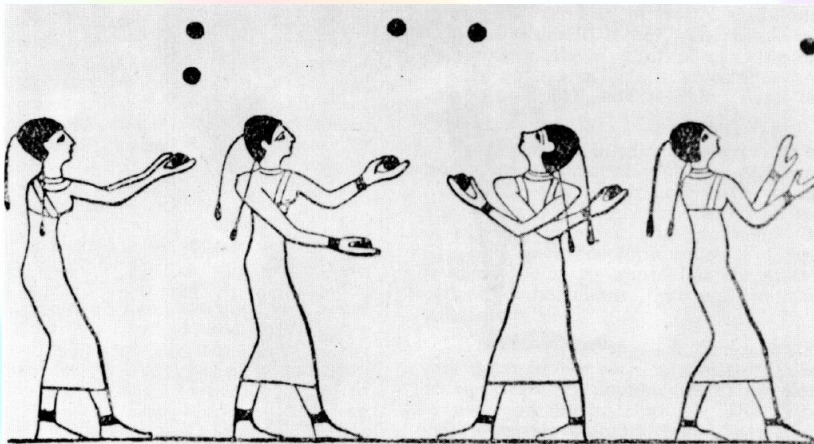
Kevei Péter

SZTE Bolyai Intézet
Sztochasztika Tanszék

π nap

2025. $\frac{\lfloor 100 \cdot \pi \rfloor}{100}$

Történelem



Forrás: Wikipédia

Történelem

- ▶ Ősi kultúrákban jelen volt: Egyiptom, Kína, India, görögök, aztékok, polinéz államok.
- ▶ Az ősi Kínában a zsonglőrködés néhány harcos által végzett művészet volt. Xiong Yiliao kilenc labdával való zsonglőrködése a harcmezőn állítólag az ellenfelet harc nélkül megfutamította, teljes győzelmet aratva ezzel.

Történelem

- ▶ James Cook kapitány feljegyzései alapján Tonga szigetén élő lányok 6 labdával zsonglőrködtek.



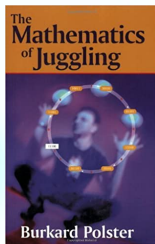
Forrás: Malaspina, Wikimedia Commons

Kvíz!

Három labdával tudsz-e zsonglőrködni?

Zsonglőrködés és matematika

- ▶ kb. 1985 körül kezdődött a zsonglőrsorozatokkal
- ▶ Ronald Graham (1935-2020): 1972-ben a Nemzetközi Zsonglőrszövetség Elnöke, MTA tiszteletbeli tagja (Erdős Pállal sokat dolgozott)
- ▶ Czédli Gábor professzor: *Zsonglőrködés és matematika* SZTE egyetemi kurzus 2007-ben



- ▶ Varga János: A zsonglőrködés fizikája, 2015, Fizikai Szemle

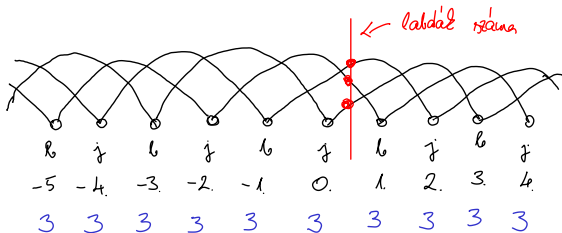
Egyszerű zsonglőrminták

- ▶ A dobások és elkapások azonos időközönként, ütemre történnek.
- ▶ Minden ütemre legfeljebb egy labdát kapunk el, és ezt azonnal fel is dobjuk.
- ▶ A minta periodikus.

Nem egyszerű zsonglőrminták

- ▶ doboz
- ▶ multiplex

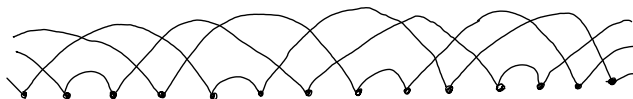
Zsonglőrdiagram: zuhatag



- ▶ labdák száma = pályák száma = 3
- ▶ zsonglőrsorozat: 3
- ▶ periódus: 1

Zsonglőrsorozat

- ▶ 0 magasságú dobás: nincs a kézben labda
- ▶ 1 magasságú dobás: gyors passz a másik kézbe
- ▶ 2 magasságú dobás: fogjuk a labdát, nem dobjuk fel
- ▶ páros magasságú: az eldobó kézben landol
- ▶ páratlan magasságú: másik kézben landol

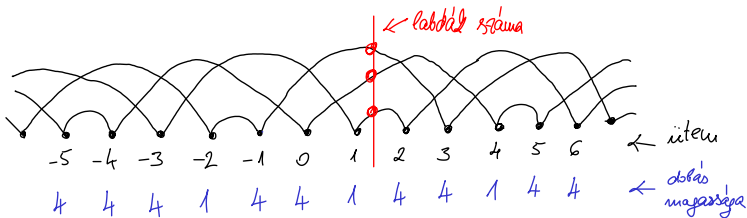


Kvíz!

Melyik zsonglőrsorozat diagramja a fenti?

- ▶ 5523
- ▶ Hortobágyi kilenclyukú híd
- ▶ 441
- ▶ 51

441



- ▶ labdák száma = pályák száma = 3
- ▶ zsonglőrsorozat: 441 (vagy 414, vagy 144)
- ▶ periódus: 3

Kvíz!

Melyik zsonglőrsorozatot láttuk?

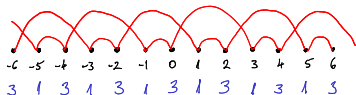
- ▶ 2
- ▶ 40
- ▶ 4
- ▶ 42

Kvíz!

Melyik zsonglőrsorozatot láttuk?

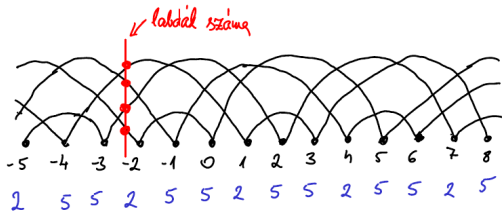
- ▶ 441
- ▶ 51
- ▶ 3
- ▶ 42

31 – 314



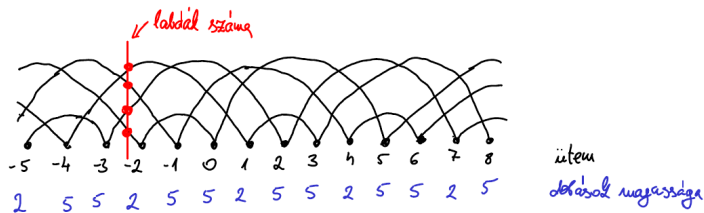
- ▶ Ez nem zsonglőrsorozat!
- ▶ Honnan tudjuk, hogy valami zsonglőrsorozat?

Labdák száma



ütem
előző magassága

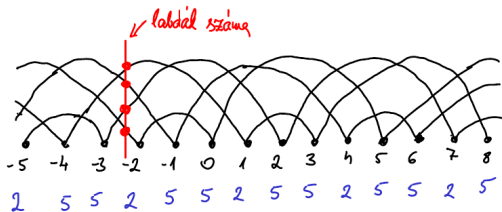
Labdák száma



Tétel (Átlagtétel)

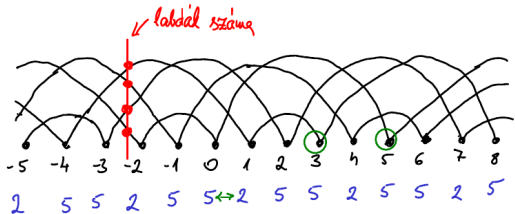
Egy zsonglőrsorozat átlaga egész szám, ami megegyezik a labdák számával.

Helycsere

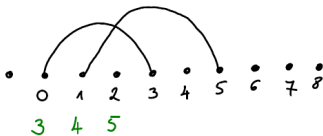


ütem
labda magassága

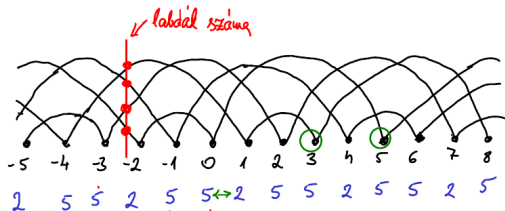
Helycsere



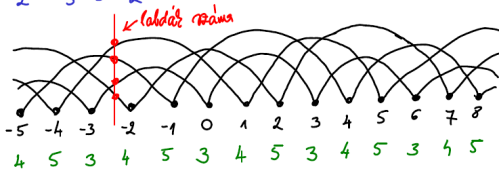
item
dobások magassága



Helycsere

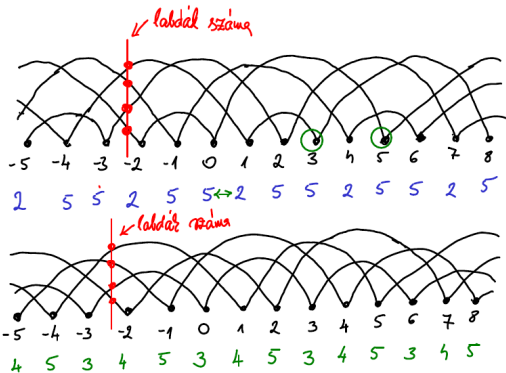


ütem
dobások magassága



ütem
dobások magassága

Helycsere



ütem
dobások magassága

ütem
dobások magassága

Tehát: 525 → 345.

Lapító algoritmus

Vegyünk egy tetszőleges sorozatot (nem feltétlenül zsonglőrsorozat): 552

- ▶ Ha a sorozat minden eleme egyenlő, akkor végeztünk. Ha nem, akkor

Lapító algoritmus

Vegyünk egy tetszőleges sorozatot (nem feltétlenül zsonglőrsorozat): 552

- ▶ Ha a sorozat minden eleme egyenlő, akkor végeztünk. Ha nem, akkor
- ▶ tekintsünk egy olyan ciklikus permutációját (552, 525, 255), aminek az első eleme a sorozat maximális eleme, második eleme pedig nem maximális: 525. Ha a legnagyobb elem után 1-el kisebb elem áll, akkor végeztünk. Ha nem, akkor

Lapító algoritmus

Vegyünk egy tetszőleges sorozatot (nem feltétlenül zsonglőrsorozat): 552

- ▶ Ha a sorozat minden eleme egyenlő, akkor végeztünk. Ha nem, akkor
- ▶ tekintsünk egy olyan ciklikus permutációját (552, 525, 255), aminek az első eleme a sorozat maximális eleme, második eleme pedig nem maximális: 525. Ha a legnagyobb elem után 1-el kisebb elem áll, akkor végeztünk. Ha nem, akkor
- ▶ hajtsuk végre a helycserét: 345. Kezdjük előlről!

Lapító algoritmus

Vegyünk egy tetszőleges sorozatot (nem feltétlenül zsonglőrsorozat): 552

- ▶ Ha a sorozat minden eleme egyenlő, akkor végeztünk. Ha nem, akkor
- ▶ tekintsünk egy olyan ciklikus permutációját (552, 525, 255), aminek az első eleme a sorozat maximális eleme, második eleme pedig nem maximális: 525. Ha a legnagyobb elem után 1-el kisebb elem áll, akkor végeztünk. Ha nem, akkor
- ▶ hajtsuk végre a helycserét: 345. Kezdjük előlről!

552 $\longrightarrow$ 525 $\longrightarrow$ 345 $\longrightarrow$ 534 $\longrightarrow$ 444

52530

52530 → 34530 → 53034 → 44034 →
40344 → 13344 → 41334 → 23334 →
42333 → 33333

A zsonglőrsorozat nem minden!

Lapító algoritmus tulajdonságai

- ▶ *Vagy a maximális elem csökken, vagy a maximális elemek száma.*

Lapító algoritmus tulajdonságai

- ▶ *Vagy a maximális elem csökken, vagy a maximális elemek száma.*

Persze, hiszen $(a, b) \rightarrow (b + 1, a - 1)$ $((5, 2) \rightarrow (3, 4))$.

Lapító algoritmus tulajdonságai

- ▶ *Vagy a maximális elem csökken, vagy a maximális elemek száma.*
Persze, hiszen $(a, b) \rightarrow (b + 1, a - 1)$ $((5, 2) \rightarrow (3, 4))$.
- ▶ *Véges sok lépésben véget ér.*

Lapító algoritmus tulajdonságai

- ▶ *Vagy a maximális elem csökken, vagy a maximális elemek száma.*
Persze, hiszen $(a, b) \rightarrow (b + 1, a - 1)$ $((5, 2) \rightarrow (3, 4))$.
- ▶ *Véges sok lépésben véget ér.*
Persze, vagy a maximális elem csökken, vagy a maximális elemek száma.

Lapító algoritmus tulajdonságai

- ▶ *Vagy a maximális elem csökken, vagy a maximális elemek száma.*
Persze, hiszen $(a, b) \rightarrow (b + 1, a - 1)$ $((5, 2) \rightarrow (3, 4))$.
- ▶ *Véges sok lépésben véget ér.*
Persze, vagy a maximális elem csökken, vagy a maximális elemek száma.
- ▶ *Zsonglőrsorozatból zsonglőrsorozatot kapunk, és csak zsonglőrsorozatból kapunk zsonglőrsorozatot.*

Lapító algoritmus tulajdonságai

- ▶ *Vagy a maximális elem csökken, vagy a maximális elemek száma.*
Persze, hiszen $(a, b) \rightarrow (b + 1, a - 1)$ $((5, 2) \rightarrow (3, 4))$.
- ▶ *Véges sok lépésben véget ér.*
Persze, vagy a maximális elem csökken, vagy a maximális elemek száma.
- ▶ *Zsonglőrsorozatból zsonglőrsorozatot kapunk, és csak zsonglőrsorozatból kapunk zsonglőrsorozatot.*
Persze, hiszen vissza tudjuk cserélni.
- ▶ *A tagok összege nem változik.*

Lapító algoritmus tulajdonságai

- ▶ *Vagy a maximális elem csökken, vagy a maximális elemek száma.*
Persze, hiszen $(a, b) \rightarrow (b + 1, a - 1)$ $((5, 2) \rightarrow (3, 4))$.
- ▶ *Véges sok lépésben véget ér.*
Persze, vagy a maximális elem csökken, vagy a maximális elemek száma.
- ▶ *Zsonglőrsorozatból zsonglőrsorozatot kapunk, és csak zsonglőrsorozatból kapunk zsonglőrsorozatot.*
Persze, hiszen vissza tudjuk cserélni.
- ▶ *A tagok összege nem változik.*
Persze, hiszen $(a, b) \rightarrow (b + 1, a - 1)$ $((5, 2) \rightarrow (3, 4))$.

Zsonglőrtétel

A lapító algoritmus kétféle véget érhet:

- ▶ Konstans sorozat. HURRÁ, ez zsonglőrsorozat.
- ▶ $(a, a - 1)$ kezdetű sorozat. Ez nem lehet zsonglőrsorozat.

Zsonglőrtétel

A lapító algoritmus kétféle véget érhet:

- ▶ Konstans sorozat. HURRÁ, ez zsonglőrsorozat.
- ▶ $(a, a - 1)$ kezdetű sorozat. Ez nem lehet zsonglőrsorozat.

Tétel

Egy sorozat pontosan akkor zsonglőrsorozat, ha a sorozatra a lapítóalgoritmust lefuttatva a konstans sorozatot kapjuk.

Kvíz!

Zsonglőrsorozat-e a 352 sorozat?

- ▶ Igen
- ▶ Nem

Következmények

Tétel (Átlagtétel)

Egy zsonglőrsorozat átlaga egész szám, ami megegyezik a labdák számával.

Következmények

Tétel (Átlagtétel)

Egy zsonglőrsorozat átlaga egész szám, ami megegyezik a labdák számával.

Tehát a 352 nem zsonglőrsorozat, hiszen $(3 + 5 + 2)/3$ nem egész. De a 324 sem az, mégis átmegy a teszten.

Következmények

Tétel (Átlagtétel)

Egy zsonglőrsorozat átlaga egész szám, ami megegyezik a labdák számával.

Tehát a 352 nem zsonglőrsorozat, hiszen $(3 + 5 + 2)/3$ nem egész. De a 324 sem az, mégis átmegy a teszten.

Tétel (Permutációteszt)

Egy $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$ sorozat pontosan akkor zsonglőrsorozat, ha az $a_0, a_1 + 1, \dots, a_{p-1} + p - 1$ számok p -vel való osztási maradékai mind különbözőek.

Következmények

Tétel (Átlagtétel)

Egy zsonglőrsorozat átlaga egész szám, ami megegyezik a labdák számával.

Tehát a 352 nem zsonglőrsorozat, hiszen $(3 + 5 + 2)/3$ nem egész. De a 324 sem az, mégis átmegy a teszten.

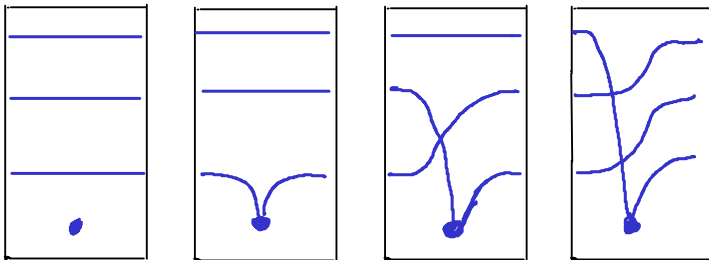
Tétel (Permutációteszt)

Egy $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$ sorozat pontosan akkor zsonglőrsorozat, ha az $a_0, a_1 + 1, \dots, a_{p-1} + p - 1$ számok p -vel való osztási maradékai mind különbözőek.

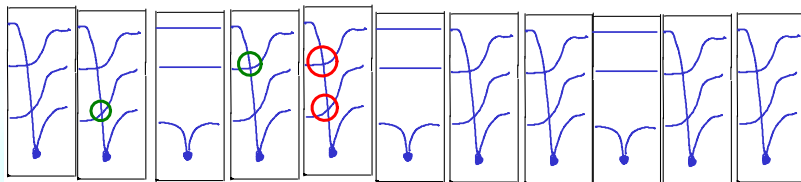
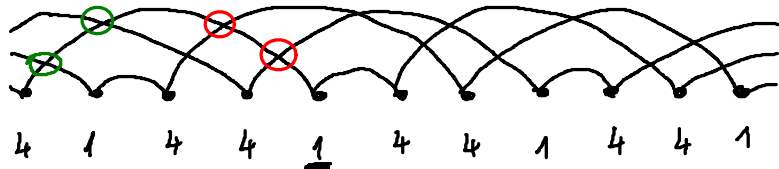
$324 \rightarrow 336 \rightarrow 000$, tehát ő nem zsonglőrsorozat.

$423 \rightarrow 435 \rightarrow 102$, tehát ő zsonglőrsorozat.

Zsonglőrkartyák



441



Zsonglőrminták száma

Rögzítsük a p periódust.

- ▶ A zsonglőrminták száma legfeljebb b labdával

$$(b + 1)^p.$$

- ▶ Pontosan b labdával

$$(b + 1)^p - b^p.$$

- ▶ Pontosan b labdával a minimális zsonglőrminták száma, ha a ciklikus permutációkat egynek számoljuk:

$$\frac{1}{p} \sum_{d|p} \mu \left(\frac{p}{d} \right) \left((b + 1)^d - b^d \right),$$

ahol μ a Möbius-függvény

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ négyzetmentes és páros sok különböző prímosztója van,} \\ -1, & \text{ha } n \text{ négyzetmentes és páratlan sok különböző prímosztója van,} \\ 0, & \text{ha } n \text{ nem négyzetmentes.} \end{cases}$$

Többkezes zsonglőrködés

- ▶ az eddigiek valójában „egykezes” zsonglőrsorozatok
- ▶ egyszerre több kéz is passzolhat - többkezes (4 kezes: passzolás)

Tessék kipróbálni!

- ▶ jó szórakozás
- ▶ minimális az eszközigénye
- ▶ bárhol játszhatunk, rossz időben is
- ▶ pár percet is játszhatunk, két óra között

Zsonglőrlabda készítése

- ▶ üres vizespalack
- ▶ rizs
- ▶ lufi
- ▶ olló

Útmutatás, zsonglőrminták

Library of Juggling - Three Ball Cascade - Mozilla Firefox

File Edit View History Bookmarks Tools Help

Library of Juggling - Three Ball Cascade - X

Navigation

[Homepage](#)
[Update Log](#)
[Tricks by Difficulty](#)

Three Ball Patterns

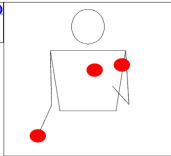
- [Alex](#)
- [Al's Slide](#)
- [Arrow of Asai](#)
- [Backcrosses](#)
- [Boston Mess](#)
 - [Cherry Picker](#)
- [Boston Shuffle](#)
 - [Burke's Slam](#)
 - [Peter's Shuffle](#)
- [Box](#)
 - [Bizarre Box](#)
 - [Broken Box](#)
 - [Burst Box](#)
 - [Extended Box](#)
 - [Gilligan's Box](#)
 - [Karas' Box](#)
 - [Luke's Shuffle](#)

LIBRARY OF JUGGLING

Cascade

Other Tutorials:

[Kings Cascade \(text-based\)](#)
[Jason Garfield \(video\)](#)
[Many Others...](#)



Siteswap: 3
Difficulty (1-10): 2
Prerequisites: None
Related Tricks: [Reverse Cascade](#)

The Three Ball Cascade is the most basic juggling pattern, and the first trick any would-be juggler should learn. The Cascade is generally considered to be the easiest.

Útmutatás, zsonglőrminták

Library of Juggling - Three Ball Cascade - Mozilla Firefox

Library of Juggling - Three Ball Cascade

<http://libraryofjuggling.com/Tricks/3BallTricks/Cascade.html>

- [Penman's Box](#)
- [Swap Box](#)
- [Switched Box](#)
- [Threaded Box](#)
- [True Box](#)
- [Underarm Box](#)
- [Burke's Barrage](#)
- [Takeouts](#)
- [Cascade](#)
 - [Reverse Cascade](#)
 - [High-Low Var.](#)
- [Chops](#)
 - [Reverse Chops](#)
- [Columns](#)
 - [Box Variation](#)
 - [Crossunder](#)
 - [Infinity](#)
 - [Matt's Mess](#)
 - [Overthrow Var.](#)
 - [Rainbow Cross](#)
 - [Reverse Crossunder](#)
 - [Reverse Infinity](#)
 - [Shower Variation](#)
 - [Shuffle-Switch](#)

To begin learning the pattern, it is important to make sure you are comfortable with throwing and catching a ball. It sounds silly, I know, but when first starting to juggle I found that my left hand (non-dominant) had a hard time accurately throwing the ball to my right. You will want to get very comfortable throwing the ball from your dominant hand to your non-dominant, and vice versa. Try to keep the height of the throws a little bit above your head. Once you have mastered this, you are ready to move on to the next step.

It is at this second step that most jugglers begin dropping (short hand way to say that you have failed to catch your ball) a lot. As such, this is probably a good time to remind you that using tennis balls on a hard floor is not the best way to juggle. For beginners, I would highly recommend getting some good quality bean bags [such as these ones from Dube](#). They are soft, don't bounce or roll (much), and are quite easy to catch.

Now that you have the proper juggling equipment, it is time to add in the second ball. This second ball is going to travel through the air with a similar trajectory as the first ball, except it is going to be thrown underneath that first ball, and travel in a different direction.

