

# Reguláris változás és elágazó folyamatok

Kevei Péter

Bolyai Intézet, Sztochasztika Tanszék

SZTE ÚNKP szeminárium  
2024. június 20.

# Tartalom

Branching processes

Vállalások

# Galton–Watson process

$$X_0 = 1,$$

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} A_i^{(n+1)},$$

where  $\{A_i^{(n)}\}$  independent, identically distributed.

## Random environment

$$X_0 = 1,$$

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} A_i^{(n+1)}, \quad n \geq 0,$$

where conditioned on the environment  $\mathcal{E} = \sigma(\xi_0, \xi_1, \dots)$ , the variables  $\{A_i^{(n)} : n \in \mathbb{N}, i \geq 1\}$  are independent, and for  $n$  fixed,  $(A_i^{(n)})_{i \geq 1}$  are iid  $\nu_{\xi_n}$

## Random environment - immigration

$$X_0 = 0,$$

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} A_i^{(n+1)} + B_{n+1}, \quad n \geq 0,$$

where conditioned on the environment  $\mathcal{E} = \sigma(\xi_0, \xi_1, \dots)$ ,  $\{A_i^{(n)}, B_n : n \in \mathbb{N}, i \geq 1\}$  are independent, and for  $n$  fixed,  $(A_i^{(n)})_{i \geq 1}$  are iid  $\nu_{\xi_n}$ , and  $B_n \sim \nu_{\xi_n}^\circ$ .

## Random environment - more formally

$\Delta$  the set of probability measures on  $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ , and consider the Borel- $\sigma$ -algebra on it induced by the total variation distance. Let  $\xi, \xi_0, \xi_1, \dots$  be an iid sequence in  $\Delta^2$ , the components  $\xi_n = (\nu_{\xi_n}, \nu_{\xi_n}^\circ)$  represent the offspring and immigration distribution in the consecutive generations.

# Stationary distribution

$$X_0 = 0,$$

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} A_i^{(n+1)} + B_{n+1} =: \theta_{n+1} \circ X_n + B_{n+1}, \quad n \geq 0,$$

$$X_\infty \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \theta_0 \circ \theta_1 \circ \dots \circ \theta_{i-1} \circ B_i,$$

Question:  $P(X_\infty > x) \sim ??$

# Tail of the stationary distribution I

## Theorem (Basrak & K 2022)

*$E(m(\xi)^\kappa) = 1$ , for some  $\kappa > 0$ , and  $E(A^\kappa) < \infty$ ,  $E(B^\kappa) < \infty$ , then  $P(X_\infty > x) \sim x^{-\kappa}$ .*

## Tail of the stationary distribution II

### Theorem (K 2024)

*Assume that  $E(m(\xi)^{1 \vee \kappa}) < 1$ ,  $E(A^{(1 \vee \kappa) + \delta}) < \infty$ ,  $E(B^\delta) < \infty$ , for some  $\delta > 0$ . Let  $\ell$  be a slowly varying function. Then*

$$P(B > x) \sim \frac{\ell(x)}{x^\kappa}, \quad \text{as } x \rightarrow \infty,$$

*if and only if*

$$P(X_\infty > x) \sim \frac{\ell(x)}{x^\kappa} \frac{1}{1 - E(m(\xi)^\kappa)}, \quad \text{as } x \rightarrow \infty.$$

## Bolyai+ vállalások - témavezetés

- ▶ P. Kevei, K. Kubatovics: Branching processes in nearly degenerate varying environment. Journal of Applied Probability, 2024.
- ▶ folytatás: funkcionális határeloszlás-tételek (konferencia, szemináriumi előadás)
- ▶ P. Kevei, M. Szalai: Branching model with state dependent offspring distribution for Chlamydia spread. Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 2024.
- ▶ folytatás: antibiotikum jelenlét, PhD védés

## Bolyai+ vállalások

- ▶ konferenciaelőadások (2023. október - Dubrovnik - Regular Variation, 2024. április Badajoz - Workshop on Branching Processes)
- ▶ Poisson-folyamatok Vígh Viktorral közösen - PhD kurzus és MSc speckoll
- ▶ 2 PhD hallgató (Kubatovics Kata, Szalai Máté), 1 szakdolgozat (Széphegyi Gergő, Mat BSc)
- ▶ előadás helyi ÚNKP rendezvényen