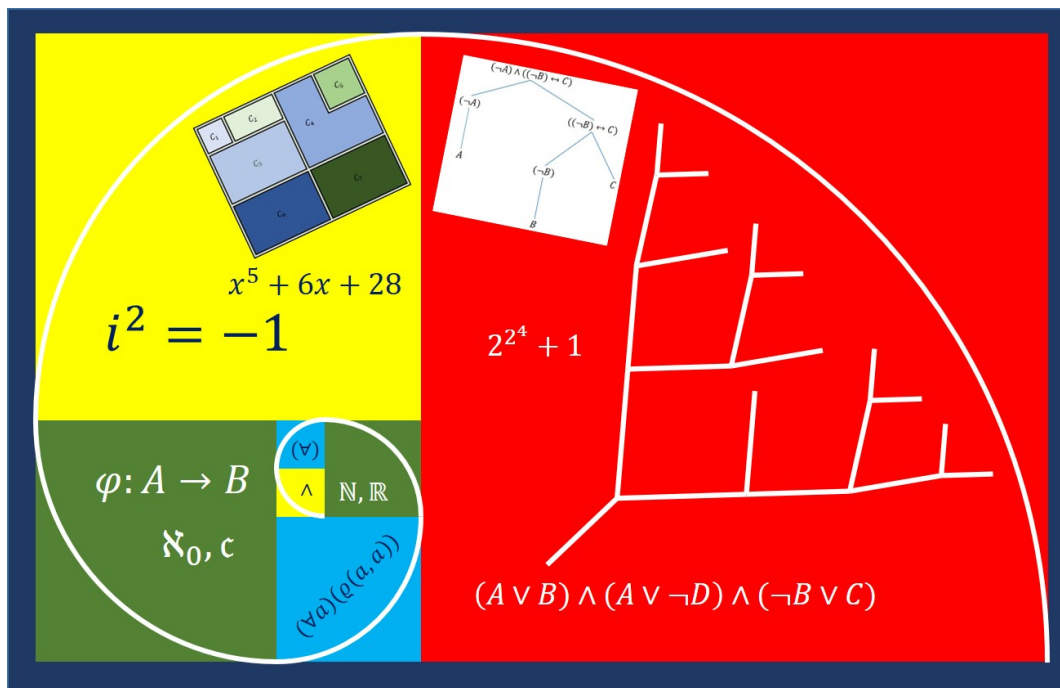


Feladatgyűjtemény

Matematika informatikusoknak 1.
(Diszkrét matematika I.)



Bevezetés

A feladatgyűjteményt készítették:

Bogya Norbert,	D. Nagy Fruzsina,	Dormán Miklós,
Győrffy Lajos,	Kardos Gergely,	Kátai-Urbán Kamilla,
Katonáné Horváth Eszter,	Kleineisel Kata,	Kulin Júlia,
Kunos Ádám,	Nemes Bernadett,	Sárik Levente Márk,
Szilák Zsófia,	Torma Bence,	Torma Gábor,
Tóth Endre.		

A feladatgyűjtemény a Matematika Informatikusoknak I. (Diszkrét matematika I.) tárgyhoz készült. A feladatsorok az előadáson szereplő fogalmak gyakorlására szolgálnak. A szükséges definíciók, tételek szerepelnek az előadó honlapján található diasorokon, [itt](#). Az 1. fejezetben a feladatok találhatóak (ítéletkalkulus, predikátumkalkulus, halmazok, relációk, kombinatorika, gráfok, teljes indukció, rekurzív definíció, számrendszerek, számelmélet és komplex számok témakörökben), a 2. fejezetben pedig a feladatok eredményei vannak. Bizonyos feladatok esetén a teljes megoldást tartalmazó videó (youtube-videó) vagy kidolgozott megoldás (pdf-fájl) is elérhető. (Néhány videó esetén a szövegben a Diszkrét matematika I. tárgy korábbi feladatsorszámára hivatkozunk.) A feladatok számozása „1.x.y. feladat” alakú, ahol „x.y. feladat” a gyakorlatokon használt feladatsorok számozását követi, a megfelelő megoldások sorszáma: „2.x.y. feladat”.

Tartalomjegyzék

1. Feladatok	1
1.1. Matematikai logika: Az ítéletkalkulus elemei	2
1.2. Matematikai logika: A predikátumkalkulus elemei	8
1.3. Halmazok	13
1.4. Relációk	21
1.5. Kombinatorika, gráfelmélet	26
1.5.1. Kombinatorika	26
1.5.2. Gráfelmélet	31
1.6. Teljes indukció, rekurzív definíció, indirekt bizonyítás	36
1.6.1. Teljes indukció	36
1.6.2. Rekurzív definíció	38
1.6.3. Indirekt bizonyítás	39
1.7. Számrendszerek, Számelmélet	41
1.7.1. Számrendszerek	41
1.7.2. Számelmélet	46
1.8. Komplex számok & Polinomok	51
2. Megoldások	55
2.1. Matematikai logika: Az ítéletkalkulus elemei	56
2.2. Matematikai logika: A predikátumkalkulus elemei	59
2.3. Halmazok	61
2.4. Relációk	65
2.5. Kombinatorika, gráfelmélet	70
2.5.1. Kombinatorika	70
2.5.2. Gráfelmélet	72
2.6. Teljes indukció, rekurzív definíció, indirekt bizonyítás	74
2.6.1. Teljes indukció	74
2.6.2. Rekurzív definíció	79
2.6.3. Indirekt bizonyítás	82
2.7. Számrendszerek, Számelmélet	85
2.7.1. Számrendszerek	85
2.7.2. Számelmélet	86
2.8. Komplex számok & Polinomok	90

1. fejezet

Feladatok

1.1. Matematikai logika: Az ítéletkalkulus elemei

Kidolgozott feladat. Legyenek a primitívek:

- A : „Az öregsámán korai táborverést rendel el.”,
 B : „A főkopjás követi őket.”,
 C : „Az öregsámán a nyargalók védelmére szorul.”

Formalizáljuk a következő állítást a primitívek felhasználásával:

Az öregsámán pontosan akkor rendel el korai táborverést, ha a főkopjás követi őket és az öregsámán nem szorul a nyargalók védelmére.

Megoldás. Vizsgáljuk a primitívek közötti kötőszavakat, a „pontosan akkor, ha” kötőszó ekvivalenciát jelöl, az „és” konjunkciót, a „nem” negációt. Így az állítás formalizáltja:

$$A \leftrightarrow (B \wedge (\neg C)).$$

1.1.1. Feladat. Formalizáljuk az alábbi állításokat az

A : „Süt a nap.”, B : „Kimegyek az uszodába.”, C : „Hamburgert ebédelek.”

primitívek felhasználásával:

- (a) *Kimegyek az uszodába, vagy hamburgert ebédelek.*
- (b) *Kimegyek az uszodába, de nem ebédelek hamburgert.*
- (c) *Nem süt a nap.*
- (d) *Ha kimegyek az uszodába, hamburgert ebédelek.*
- (e) *Pontosan akkor megyek ki az uszodába, ha süt a nap.*

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.1)

1.1.2. Feladat. Adjuk meg az

$$F = (A \vee (\neg B)) \leftrightarrow ((\neg C) \rightarrow B)$$

formula összes részformuláját.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.2)

1.1.3. Feladat. Döntsük el, hogy az

- (a) $(A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \wedge C)$,
- (b) $(A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \rightarrow C)$,
- (c) $A \leftrightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C))$
- (d) $A \rightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C))$

formulák közül — a primitívek alkalmas megválasztásával — melyik formalizálja a következő ítéletkalkulusbeli ítéletet:

Gombóc Artúr akkor és csak akkor tud Afrikába utazni, ha elbírja a repülőgépet, vagy ha nem bírja el a repülőgépet, de indul hajó Afrikába.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.3)

Kidolgozott feladat. A primitítelek alkalmas megválasztásával formalizáljuk a

Ha ezt a mondatot jól formalizálom és esik az eső, vagy a gyakorlatvezetőnek jó kedve van, akkor az, hogy kapok egy piros pontot azzal ekvivalens, hogy nem süt a nap.

ítélekalkulusbeli ítéletet.

Megoldás. Az ítélet részekre bontásában segítenek a kötőszavak, a primitítelek azok a tagmondatok lesznek, amelyek már nem tartalmaznak logikai műveleteket:

- A: Jól formalizálom ezt a mondatot.*
- B: Esik az eső.*
- C: A gyakorlatvezetőnek jó kedve van.*
- D: Kapok egy piros pontot.*
- E: Süt a nap.*

Ezek után a kötőszavakhoz megkeressük a megfelelő logikai műveletet, és az állítás formalizáltja:

$$((A \wedge B) \vee C) \rightarrow (D \leftrightarrow (\neg E)).$$

1.1.4. Feladat. A primitítelek alkalmas megválasztásával formalizáljuk a következő ítélekalkulusbeli ítéleteket.

- (a) *Ha ezt a mondatot jól formalizálom, vagy a gyakorlatvezetőnek jó kedve van, akkor kapok egy piros pontot, és örülhetek.*
- (b) *Csak akkor megyek boltba, ha nem esik az eső, vagy ha esik, de van nálam esernyő.*
- (c) *Ha esik az eső, és nincs rossz kedvem, akkor pontosan akkor megyek dimat gyakorlatra, ha zh-t írunk.*
- (d) *Pontosan akkor érem el a zh-t, ha nem esik több hó, vagy ha esik, de eltakarítják.*
- (e) *Akkor és csak akkor jön a télapó szánnal, ha esik a hó, nem olvad el, és nem sérül le egyetlen rénszarvas sem.*
- (f) *Ha egy szelet kenyér egyik fele lekváros, és leejtjük, akkor a föld vagy az asztal lekváros lesz.*
- (g) *Ha sikerül a diszkrét matematika gyakorlatom, akkor pontosan akkor leszek szomorú, ha nem sikerül a vizsgám.*
- (h) *Ha nem süt a nap, és szeretünk röplabdázni, akkor pontosan akkor megyünk le a Tiszára, ha süt a nap.*
- (i) *Ki kell találnom még formalizálandó mondatokat, vagy kirúgnak az állásomból, és mehetek utcát söpörni.*
- (j) *Szeretek utcát söpörni, de mondatokat formalizálni csak akkor szeretek, ha nincs más választásom.*
- (k) *Ha még egy mondatot formalizálnom kell, akkor kitepem a hajamat, vagy megőrülök.*

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.4)

1.1.5. Feladat. Formalizáljuk a következő ítéleteket, és döntsük el, hogy a primitítelek megadott értéke mellett az ítélet igaz vagy hamis. (A primitítelek mindig „pozitívak” legyenek, azaz ne tartalmazzanak tagadást, és a mondatban való előfordulásuk szerint jelöljük $A, B, C, \dots$ betűkkel.)

- (a) *Ha nem fáj a lábam, és nincs rossz kedvem, akkor pontosan abban az esetben megyek el sörözni, ha a haverom is velem jön.* ($A: h, B: h, C: i, D: h$)
- (b) *Ha Micimackó mézet akar enni, de a méz a fán van, akkor a mézszerzés pontosan akkor sikeres, ha Malacka nem fél a méhektől, vagy Tigris fel tud mászni a fára.*
($A: i, B: h, C: i, D: h, E: i$)
- (c) *Ha a róka okos, és megkérdezi a hollót, akkor ha a holló buta, akkor vagy kinyitja a csőrét, vagy leejti a sajtot.* ($A: i, B: i, C: i, D: h, E: h$)

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.5)

Kidolgozott feladat. Igazoljuk az alábbi logikai ekvivalenciát:

$$(A \vee B) \wedge (C \rightarrow B) \equiv B \vee (\neg(A \rightarrow C)).$$

Megoldás. (1. mego.:) Legyen

$$\begin{aligned} F &= (A \vee B) \wedge (C \rightarrow B), \\ G &= B \vee (\neg(A \rightarrow C)). \end{aligned}$$

A	B	C	$A \vee B$	$C \rightarrow B$	F	$A \rightarrow C$	$\neg(A \rightarrow C)$	G
i	i	i	i	i	i	i	h	i
i	i	h	i	i	i	h	i	i
i	h	i	i	h	h	i	h	h
i	h	h	i	i	i	h	i	i
h	i	i	i	i	i	i	h	i
h	i	h	i	i	i	i	h	i
h	h	i	h	h	h	i	h	h
h	h	h	h	i	h	i	h	h

Az F és a G oszlopát összehasonlítva látjuk, hogy a formulák igazságértéke a változók tetszőleges logikai értéke esetén megegyezik, így $F \equiv G$.

(2. mego.:) Használjuk a bal oldali formula esetén a $C \rightarrow B \equiv (\neg C) \vee B$ ekvivalenciát, valamint azt, hogy $\vee$ disztributív $\wedge$ -ra. Helyettesítsük továbbá A -t $\neg(\neg A)$ -val.

$$(A \vee B) \wedge (C \rightarrow B) \equiv (A \vee B) \wedge ((\neg C) \vee B) \equiv (A \wedge (\neg C)) \vee B \equiv ((\neg(\neg A)) \wedge (\neg C)) \vee B.$$

Majd az egyik De Morgan azonosság segítségével kapjuk, hogy $(\neg(\neg A)) \wedge (\neg C) \equiv \neg((\neg A) \vee C)$, ahol a zárójelben szereplő formulát az előző lépéshez hasonlóan átírhatjuk implikációra.

$$((\neg(\neg A)) \wedge (\neg C)) \vee B \equiv \neg(\neg A \vee C) \vee B \equiv \neg(A \rightarrow C) \vee B.$$

Ezután a $\vee$ művelet kommutativitása használva az eredeti ekvivalenciában jobb oldalon szereplő formulát kapjuk.

1.1.6. Feladat. Igazoljuk az alábbi logikai ekvivalenciákat:

- (a) $(A \wedge B) \rightarrow C \equiv A \rightarrow (B \rightarrow C)$,
- (b) $((\neg A) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge C \equiv (A \leftrightarrow C) \wedge A$,

- (c) $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \equiv (A \vee B) \rightarrow C$,
- (d) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)) \equiv A \rightarrow (A \vee B)$,
- (e) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee C)) \equiv (A \wedge B) \rightarrow A$,
- (f) $((A \wedge B) \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow (\neg C)) \equiv (((\neg C) \vee B) \vee C) \leftrightarrow (\neg(C \wedge A))$.

(↗ eredmény: 2.1.6)

1.1.7. Feladat. Formalizáljuk a következő ítéleteket, és döntsük el, hogy logikailag ekvivalensek-e.

- (a) (1) *Ha nem tanulsz, vagy puskázol, akkor megbuksz.*
(2) *Ha nem tanulsz, akkor megbuksz, valamint ha puskázol, akkor is megbuksz.*
- (b) (1) *A Sárkányfűárus pontosan akkor tud árulni a piacon, ha sem Süsü, sem Királyfi nincs a városban.*
(2) *Süsü vagy Királyfi a városban van, vagy a Sárkányfűárus tud árulni a piacon, valamint ha Süsü vagy Királyfi nincs a városban, akkor a Sárkányfűárus nem tud árulni a piacon.*
- (c) (1) *Kriszta csak akkor nem bukik meg, ha Mészga Géza pontosan akkor lesz dühös, ha Aladár szivarozni kezd.*
(2) *Kriszta megbukik, vagy Aladár nem kezd el szivarozni, vagy Mészga Géza dühös lesz, valamint ha Kriszta nem bukik meg, és Aladár sem kezd el szivarozni, akkor Mészga Géza nem lesz dühös.*

(↗ eredmény: 2.1.7)

Kidolgozott feladat. Az ismert logikai ekvivalenciák felhasználásával alakítsuk át a $((\neg A) \vee B) \rightarrow ((\neg B) \wedge C)$ formulát úgy, hogy a kapott formula negáción, diszjunkción és konjunkción kívül ne tartalmazzon más logikai műveletet, és negáció csak ítéletváltozóra vonatkozzon. Több megoldás is lehetséges. Minden átalakítás során adjuk meg, hogy melyik ismert logikai ekvivalenciát használtuk.

Megoldás: A formulában szerepel implikáció, ami az $A \rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B$ ekvivalencia segítségével a következőképpen alakítható át:

$$((\neg A) \vee B) \rightarrow ((\neg B) \wedge C) \equiv \neg((\neg A) \vee B) \vee ((\neg B) \wedge C).$$

A formula már csak negációt, diszjunkciót és konjunkciót tartalmaz, de negáció nem csak ítéletváltozóra vonatkozik. Használjuk először a $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$ De Morgan azonosságot, majd a $\neg(\neg A) \equiv A$ ekvivalenciát:

$$\neg((\neg A) \vee B) \vee ((\neg B) \wedge C) \equiv ((\neg(\neg A)) \wedge (\neg B)) \vee ((\neg B) \wedge C) \equiv (A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg B) \wedge C).$$

A kapott formula már megfelel a feltételeknek, de ahogy a feladat szövege is írja, több megoldás is lehet, például alkalmazhatjuk, hogy a konjunkció disztributív a diszjunkcióra, és a következő formulához jutunk:

$$(A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg B) \wedge C) \equiv (A \vee C) \wedge (\neg B).$$

Az előző logikai ekvivalencia mindkét oldalán olyan formula szerepel, ami a feladat feltételeinek megfelel.

1.1.8. Feladat. Az ismert logikai ekvivalenciák felhasználásával alakítsuk át a következő formulákat úgy, hogy a kapott formulák negáción, diszjunkción és konjunkción kívül ne tartalmazzanak más logikai műveletet, és negáció csak ítéletváltozóra vonatkozzon. Több megoldás is lehetséges. Minden átalakítás során adjuk meg, hogy melyik ismert logikai ekvivalenciát használtuk.

- (a) $\neg(A \wedge (\neg B) \wedge C)$,
- (b) $\neg(A \rightarrow B)$,
- (c) $(\neg A) \rightarrow (B \wedge C)$,
- (d) $(A \vee B) \rightarrow C$,
- (e) $(A \vee (\neg B)) \leftrightarrow C$,
- (f) $((\neg A) \wedge B) \leftrightarrow (A \vee C)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.8)

1.1.9. Feladat. Az alábbi formulák esetén húzzuk alá a klózokat, és döntsük el, hogy melyik formula az A, B, C változókból felépített konjunktív normálforma, illetve teljes konjunktív normálforma.

$$\begin{aligned} F_1 &= (A \vee B \vee (\neg C)) \wedge (A \vee (\neg B)), & F_2 &= (A \wedge (\neg B) \wedge (\neg C)) \vee (A \wedge B), \\ F_3 &= (A \vee (\neg B) \vee C) \wedge ((\neg A) \vee B \vee C), & F_4 &= (\neg A) \vee B \vee C, \\ F_5 &= (A \vee (\neg B)) \wedge B \wedge C, & F_6 &= A \wedge B \wedge (\neg C). \end{aligned}$$

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.9)

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg az A, B, C változókból felépített alábbi formula teljes konjunktív normálformáját:

$$(A \wedge B) \rightarrow (\neg(B \vee (\neg C))).$$

Megoldás: Írjuk fel a formula igazságtáblázatát.

A	B	C	$A \wedge B$	$\neg C$	$B \vee (\neg C)$	$\neg(B \vee (\neg C))$	$(A \wedge B) \rightarrow (\neg(B \vee (\neg C)))$
i	i	i	i	h	i	h	h
i	i	h	i	i	i	h	h
i	h	i	h	h	h	i	i
i	h	h	h	i	i	h	i
h	i	i	h	h	i	h	i
h	i	h	h	i	i	h	i
h	h	i	h	h	h	i	i
h	h	h	h	i	i	h	i

A teljes konjunktív normálforma leolvasható úgy, hogy tekintjük azokat a sorokat az igazságtáblázatban, ahol a formula logikai értéke hamis. Ahány hamis érték van, annyi klóz lesz, tehát esetünkben kettő. A klózokban minden változó szerepelni fog negálva vagy negálatlanul. A következőképpen dönthetjük el, hogy mely változókat negáljuk: a formula hamis értékeinél vizsgáljuk a változók logikai értékét, ha h az érték, akkor a változó negálatlanul szerepel a klózban, ha i , akkor pedig negálva. Így kapjuk a formula teljes konjunktív normálformáját: $((\neg A) \vee (\neg B) \vee (\neg C)) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B) \vee C)$.

1.1.10. Feladat. Határozzuk meg az A, B, C változókból felépített alábbi formulák teljes konjunktív normálformáját:

- (a) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$,
- (b) $(A \vee (\neg B)) \rightarrow (C \leftrightarrow B)$,
- (c) $A \vee ((B \rightarrow C) \wedge (\neg(B \wedge C)))$,
- (d) $(\neg(A \wedge B)) \wedge ((A \wedge (\neg C)) \rightarrow B)$,
- (e) $(A \vee (\neg B)) \rightarrow ((\neg(B \wedge C)) \leftrightarrow A)$,
- (f) $((\neg A) \wedge B) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \wedge (\neg C)))$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: [2.1.10](#))

1.2. Matematikai logika: A predikátumkalkulus elemei

Kidolgozott feladat. Legyen az individuumtartomány az emberek halmaza. Jelölje $I(x)$ az „ x igazat mond”, $B(x, y)$ az „ x barátja y -nak” predikátumokat, $a(x)$ az „ x anyja” függvényjelet, k pedig a „Károly” individuumkonstanst. Fordítsuk köznapra az alábbi formulákat.

- (a) $(\exists x)(I(x) \wedge (\neg B(x, k)))$,
- (b) $(\forall x)(B(x, k) \rightarrow I(a(x)))$.

Megoldás.

- (a) A $(\exists x)$ az úgynevezett egzisztenciális kvantor, ami a szövegben „van olyan”, „van, aki”, „létezik”, „található” kifejezésekkel jelenik meg. A logikai műveletek az ítéletkalkuluban szereplő műveletekkel egyeznek meg. Így hétköznapi nyelven a formula:
Van, aki igazat mond, és Károlynak nem a barátja.
- (b) A $(\forall x)$ az úgynevezett univerzális kvantor, ami szövegben például a „bármely”, „minden”, „összes”, „tetszőleges” kifejezésekkel fejezhető ki. Predikátumkalkulusban az implikáció sok esetben nem jelenik meg „ha, akkor” szöveggént. Hétköznapi nyelven a formula például így fogalmazható meg:
Károly összes barátjának anyja igazat mond.

1.2.1. Feladat. Legyen az individuumtartomány az egész számok halmaza. Vezessük be a következő jelöléseket:

- egyváltozós predikátumok:

$M(x)$: „ x négyzetszám”, $P(x)$: „ x páros szám”, $N(x)$: „ x negatív szám”.

- kétváltozós predikátum:

$O(x, y)$: „ x osztója y -nak”,

- kétváltozós függvény(jel)ek

$o(a, b) = a + b$, azaz a és b szokásos összege, $s(a, b) = a \cdot b$, azaz a és b szokásos szorzata.

Fordítsuk köznapra az alábbi formulákat.

- (a) $P(7)$,
- (b) $M(4) \wedge \neg N(o(9, 3))$,
- (c) $(\forall x)(O(2, s(4, x)))$,
- (d) $(\exists x)(P(x) \wedge O(x, 6))$,
- (e) $(\forall x)(O(4, x) \rightarrow P(x))$,
- (f) $(\forall x)(\forall y)(P(o(x, y)) \leftrightarrow P(s(x, y)))$,
- (g) $(\forall x)(M(x) \rightarrow (\exists y)(P(y) \wedge O(x, y)))$,
- (h) $(\forall x)(\forall y)(\neg P(s(x, y)) \leftrightarrow (\neg P(x) \vee \neg P(y)))$,
- (i) $(\exists x)\left(P(x) \wedge (\forall y)\left((P(y) \wedge N(y)) \rightarrow (\neg O(y, x))\right)\right)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.2.1)

Kidolgozott feladat. Legyen az individuumtartomány az $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz és legyen h az az egyváltozós függvényjel A -n, melyre

$$h(1) = 1, h(2) = 3, h(3) = 4, h(4) = 5, h(5) = 5, h(6) = 1.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$R(x, y) : x - y = 1; \quad N(x) : x \text{ négyzetszám}; \quad E(x, y) : x = y.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak, illetve melyek hamisak (indoklással együtt).

- (a) $(\exists x)(N(x) \wedge R(h(x), x))$,
- (b) $(\forall x)(\exists y)(N(x) \rightarrow E(h(y), x))$.

Megoldás.

- (a) A következőt kell eldöntenünk: van-e olyan $x \in A$ elem, ami négyzetszám, és $h(x) - x = 1$. A válasz igaz, az $x = 4$ teljesíti, mert a 4 négyzetszám, és $h(4) = 5$, tehát $h(4) - 4 = 1$. A formula ebben az interpretációban tehát igaz.
- (b) A következőt kell eldöntenünk: teljesül-e minden $x \in A$ elemre, hogy van olyan $y \in A$, hogy ha x négyzetszám, akkor $h(y) = x$. A válasz igaz, hiszen az implikáció pontosan akkor lenne hamis, ha az előtag igaz, az utótag hamis. Tehát négyzetszámokat kell venni A -ból, ami az 1 és 4, de az $x = 1$ elemhez y -nak választhatjuk az 1-et, az $x = 4$ esetén pedig $y = 3$ a megfelelő elem, mert $h(1) = 1$ és $h(3) = 4$, így ezekben az esetekben az utótag is igaz. A formula ebben az interpretációban tehát igaz.

1.2.2. Feladat. Legyen az individuumtartomány az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz, és legyen f az az egyváltozós függvényjel A -n, melyre

$$f(1) = 3, f(2) = 2, f(3) = 1, f(4) = 2, f(5) = 3.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$P(x, y) : x + y = 5, \quad Q(x) : x \text{ páros}, \quad E(x, y) : x = y.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

- (a) $(\forall x)(\exists y)(E(f(x), y))$,
- (b) $(\forall x)(\exists y)(E(f(y), x))$,
- (c) $(\exists x)(\forall y)(E(f(x), y))$,
- (d) $(\exists x)(\forall y)(E(f(y), x))$,
- (e) $(\forall x)(Q(x) \leftrightarrow Q(f(x)))$,
- (f) $(\forall x)(\forall y)(\neg E(x, y) \rightarrow \neg E(f(x), f(y)))$,
- (g) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x))$,
- (h) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow \neg E(x, y))$,
- (i) $(\forall x)(\forall y)((P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow E(x, y))$,
- (j) $(\exists x)(\forall y)(\neg E(f(y), x))$,
- (k) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow (Q(x) \leftrightarrow \neg Q(y)))$,
- (l) $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.2.2)

Kidolgozott feladat. A szokásos módon, jelöljenek az ABC nagybetűi predikátumokat; a kisbetűi közül x, y és z változókat, a, b, c individuumkonstansokat; egyéb kisbetűi függvényjeleket. Az alábbi formulákban melyek a változók kötött, illetve szabad előfordulásai?

- (a) $(\forall x)((\exists y)K(x, y) \vee L(z)),$
- (b) $(\forall y)M(k(x, b), x) \vee (\exists z)(M(y, k(z, a))).$

Megoldás. Ha egy változóra vonatkozik kvantor (azaz a változó egy kvantor hatáskörén belül van), akkor az a változó kötött előfordulása, különben pedig szabad előfordulása. A piros szín jelöli a kötött, a zöld pedig a szabad előfordulást.

- (a) $(\forall x)((\exists y)K(\text{piros } x, \text{piros } y) \vee L(\text{zöld } z)),$
- (b) $(\forall y)M(k(\text{zöld } x, b), \text{zöld } x) \vee (\exists z)(M(\text{zöld } y, k(\text{zöld } z, a))).$

1.2.3. Feladat. A szokásos módon, jelöljenek az ABC nagybetűi predikátumokat; a kisbetűi közül x, y és z változókat; a, b, c individuumkonstansokat; egyéb kisbetűi függvényjeleket. Az alábbi formulákban melyek a változók kötött illetve szabad előfordulásai?

- (a) $(\forall x)(K(x, y) \vee L(x)),$
- (b) $(\exists y)(I(s(x, y)) \leftrightarrow (\forall x)(O(x, y))),$
- (c) $M(k(x, b), x) \wedge (\exists z)(M(y, k(z, a))),$
- (d) $(\forall x)P(f(x, a), x) \rightarrow (\exists y)(P(f(y, x), y) \wedge Q(x)).$

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.2.3)

Kidolgozott feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéletet, ahol az individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok és az individuumkonstans az alábbiak. Továbbá adjuk meg a kapott formula tagadását úgy, hogy negáció csak predikátumjelre vonatkozzon.

$$\begin{aligned} I(x): „x informatikus”, & \quad Sz(x, y): „x szomszédja y-nak”, \\ R(x): „x szeret röplabdázni”, & \quad v: „Viki”. \end{aligned}$$

Viki minden informatikus szomszédja szeret röplabdázni.

Megoldás. Érdemes az ítéletet átfogalmazni úgy, hogy jobban látszódjon, hogy milyen logikai műveletek szerepelnek: *Minden ember, ha informatikus és Viki szomszédja, akkor szeret röplabdázni.* Így a következő formulát kapjuk:

$$(\forall x)((I(x) \wedge Sz(x, v)) \rightarrow R(x)).$$

A tagadáshoz először használjuk a $\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)(\neg F)$, és az implikációt írjuk fel diszjunkció és negáció segítségével.

$$\neg(\forall x)((I(x) \wedge Sz(x, v)) \rightarrow R(x)) \equiv (\exists x)\neg(\neg(I(x) \wedge Sz(x, v)) \vee R(x)).$$

Ezután használjuk a megfelelő De Morgan azonosságot, továbbá a dupla tagadást, valamint a konjunkció asszocitivása miatt a zárójelezést elhagyjuk:

$$(\exists x)(\neg(\neg(I(x) \wedge Sz(x, v))) \wedge \neg R(x)) \equiv (\exists x)(I(x) \wedge Sz(x, v) \wedge \neg R(x))$$

A formulát hétköznapi nyelven megfogalmazva ellenőrizhetjük, hogy tényleg az eredeti ítélet tagadását kaptuk.

Van olyan informatikus szomszédja Vikinek, aki nem szeret röplabdázni.

1.2.4. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket. Az individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, függvényjelek és individuumkonstansok a következők:

$H(x)$: „ x hallgató”, $V(x)$: „ x felkészült a vizsgára”, $B(x, y)$: „ x az y barátja”,
 $C(x, y)$: „ x csoporttársa y -nak”, $T(x, y)$: „ x házastársa y -nak”, $F(x)$: „ x férfi”,
 $A(x)$: „ x anya”, p : „Péter”, $a(x)$: „ x anyja”,
 $S(x)$: „ x szeret főzni”.

- (a) *Néhány hallgató nem készült fel a vizsgára.*
- (b) *Minden hallgató felkészült a vizsgára.*
- (c) *Néhány hallgatónak nincs barátja.*
- (d) *Bizonyos hallgatók csak a csoporttársaikkal házasodnak össze.*
- (e) *Vannak nőtlen férfiak.*
- (f) *Minden anya nő, de van olyan nő, aki nem anya.*
- (g) *Péter összes barátja hallgató.*
- (h) *Néhány hallgató anyja nem szeret főzni.*
- (i) *Péter anyja szeret főzni.*

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.2.4)

1.2.5. Feladat. Megfelelően választott predikátum- és függvényjelek segítségével formalizáljuk az alábbi mondatokat elsőrendű nyelven. Adjuk meg a kapott formula tagadását úgy, hogy negáció csak predikátumjelre vonatkozzon. Az individuumtartomány legyen az egész számok halmaza.

- (a) *Minden egész számnak osztója az 1 és önmaga.*
- (b) *Minden egész számnál létezik kisebb.*
- (c) *Minden 10-zel osztható szám 0-ra végződik.*
- (d) *Van olyan negatív szám, amely négyzete pozitív.*
- (e) *Minden szám pozitív vagy negatív.*

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.2.5)

1.2.6. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban a következő ítéleteket. Adjuk meg a formulák tagadását is úgy, hogy kvantort nem tagadunk, és fogalmazzuk meg a megfelelő ítéletet köznapi nyelven. (Individuumtartomány az emberek halmaza.)

- (a) *Minden informatikus éhes.*
- (b) *Ha egy szakács éhes, főz magának.*
- (c) *Az éhes informatikusok kedvelik a szakácsokat.*

- (d) *Van olyan szakács, aki csak informatikusnak főz.*
- (e) *Minden informatikus kedveli a neki főző szakácsokat.*
- (f) *Mézga Géza szerencsétlen, de gyermekei szerencsések.*
- (g) *Ha Mézga Géza szakács, és senki sem éhes, akkor mindenki szerencsés.*

($\rightsquigarrow$ eredmény: [2.2.6](#))

1.3. Halmazok

Kidolgozott feladat. Legyen az alaphalmaz $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, és tekintsük a következő halmazokat: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$ és $C = \{2, 3, 5, 7\}$. Határozzuk meg az alábbi halmazok elemeit.

- (a) $\overline{A} \setminus B$,
- (b) $(A \triangle C) \cap B$,
- (c) $\mathcal{P}(C \cap B)$.

Megoldás.

- (a) Az $\overline{A}$ halmaz elemeit határozzuk meg először: $\overline{A} = \{5, 6, 7, 8\}$. Majd ezen elemek közül elhagyjuk azokat, amelyek B -nek is elemei: $\overline{A} \setminus B = \{7, 8\}$,
- (b) Mivel $A \triangle C = \{1, 4, 5, 7\}$, így $(A \triangle C) \cap B = \{1, 5\}$,
- (c) Először a $C \cap B$ halmaz elemeit határozzuk meg: $C \cap B = \{2, 5\}$, majd ezen halmaz hatványhalmazát, amelynek elemei a $C \cap B$ halmaz összes részhalmaza: $\mathcal{P}(C \cap B) = \{\emptyset, \{2\}, \{5\}, \{2, 5\}\}$.

1.3.1. Feladat. Legyen az alaphalmaz $U = \{a, b, c, d, e\}$ és tekintsük a következő halmazokat: $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{d, e\}$ és $C = \{a, b, e\}$. Határozzuk meg a következő halmazok elemeit:

- (a) $A \cup B$,
- (b) $A \cap B$,
- (c) $\overline{B}$,
- (d) $A \setminus B$,
- (e) $A \triangle B$,
- (f) $(A \triangle \overline{C}) \setminus \overline{B}$,
- (g) $\mathcal{P}(B)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.1)

1.3.2. Feladat. Legyen $A = \mathcal{P}(\{a, b\})$ és $B = \mathcal{P}(\{b, c\})$. Határozzuk meg a következő halmazok elemeit:

- (a) $A \cup B$,
- (b) $A \cap B$,
- (c) $A \setminus B$,
- (d) $B \setminus A$,
- (e) $A \triangle B$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.2)

1.3.3. Feladat. Legyen $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Döntsük el, hogy az alábbiak közül melyik igaz és melyik hamis.

- (a) $\emptyset \in A$,
- (b) $\emptyset \subseteq A$,
- (c) $\{\emptyset\} \in A$,
- (d) $\{\emptyset\} \subseteq A$,
- (e) $\{\{\emptyset\}\} \in A$,
- (f) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$,
- (g) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A$,
- (h) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.3)

1.3.4. Feladat. Határozzuk meg a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ halmaz elemeit.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.4)

Kidolgozott feladat. Döntsük el, hogy az $A = \{c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ halmaz hatványhalmazának alábbi részhalmazai osztályozásai-e az A halmaznak.

- (a) $\mathcal{C}_1 = \{\{c, f, i\}, \{d, g, k\}, \{e, h, j, j\}\},$
 (b) $\mathcal{C}_2 = \{\{c, d, k\}, \{e, f, g, h\}, \{i\}, \emptyset\}.$

Megoldás.

- (a) A $\mathcal{C}_1$ osztályozás, hiszen a részhalmazok nemüresek, diszjunktak, és egyesítésük kiadja az A -t. Az nem jelent problémát, hogy az egyik osztályban a j duplán szerepel, mert a halmazok esetén hiába van többször felsorolva egy elem, akkor is csak egyszer vesszük figyelembe.
 (b) A $\mathcal{C}_2$ nem osztályozás, egyik részhalmazban sem szerepel a j elem, és tartalmazza az $\emptyset$ -t.

1.3.5. Feladat. Döntsük el, hogy az $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz hatványhalmazának alábbi részhalmazai osztályozásai-e az A halmaznak.

- (a) $\mathcal{C}_1 = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, e, f\}\},$ (b) $\mathcal{C}_2 = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f\}\},$
 (c) $\mathcal{C}_3 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, c, e, f\}\},$ (d) $\mathcal{C}_4 = \{\emptyset, \{a, c, d\}, \{b, e, f\}\},$
 (e) $\mathcal{C}_5 = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{b, e, f\}\},$ (f) $\mathcal{C}_6 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, f\}\}.$

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.5)

Kidolgozott feladat. Adjunk meg az $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ halmazon egy-egy olyan osztályozást, melynek

- (a) legalább 5 osztálya van,
 (b) minden osztálya legalább 3 elemű,
 (c) legfeljebb 3 osztálya van, és mindegyik legalább 4 elemű.

Megoldás. Több megfelelő osztályozás létezik, egy-egy megfelelő példát adunk meg.

- (a) $\{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}, \{e, f\}, \{g, h\}\},$
 (b) $\{\{a, b, c\}, \{d, e, f, g, h\}\},$
 (c) $\{\{a, b, c, d, e, f, g, h\}\}.$

1.3.6. Feladat. Adjunk meg az $\{1, 2, \dots, 7\}$ halmazon egy olyan osztályozást, melynek

- (a) legalább 3 osztálya van;
 (b) pontosan 3 osztálya van;
 (c) két osztálya van és mindegyik legalább kételemű;
 (d) három osztálya van és mindegyik legalább háromelemű.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.6)

Kidolgozott feladat. Döntsük el, hogy teljesülnek-e tetszőleges A, B, C halmazok esetén a következő egyenlőségek.

- (a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$,
 (b) $B \setminus (A \cup C) = (B \setminus A) \cap (B \setminus C)$.

Megoldás.

- (a) Nem, ha $A = B = C = \{1\}$, akkor $(A \setminus B) \setminus C = \emptyset$ és $A \setminus (B \setminus C) = \{1\}$.
 (b) Igen, mivel

$$B \setminus (A \cup C) = B \cap \overline{A \cup C} = B \cap (\overline{A} \cap \overline{C}) = (B \cap \overline{A}) \cap (B \cap \overline{C}) = (B \setminus A) \cap (B \setminus C).$$

1.3.7. Feladat. Döntsük el, hogy teljesülnek-e tetszőleges A, B, C halmazok esetén a következő egyenlőségek.

- (a) $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$,
 (b) $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$,
 (c) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$,
 (d) $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
 (e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
 (f) $(A \cap B) \setminus (B \setminus (A \cup C)) = A \cap B$,
 (g) $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = A \cup B$

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.7)

1.3.8. Feladat. Adjuk meg az $A \cup (B \cap (C \cup D))$ halmaz komplementerét az A, B, C, D halmazok és komplementereik segítségével.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.8)

1.3.9. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbiak közül melyik igaz és melyik nem igaz, tetszőleges olyan A, B halmazokra, amelyekre $A \cup B \subseteq B$.

- (a) $A \subseteq B$,
 (b) $A = B$,
 (c) $B \setminus A = \emptyset$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.9)

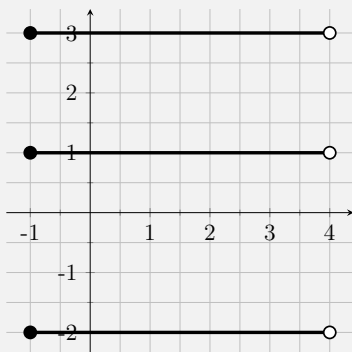
1.3.10. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C, D halmazokra teljesül, hogy

- (a) $(A \cup B) \cap (C \cup D) \supseteq (A \cap C) \cup (B \cap D)$,
 (b) $(A \cap C) \setminus (B \setminus (C \cup D)) \supseteq A \cap C \cap D$.

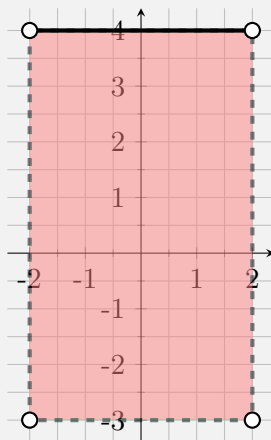
($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.10)

Kidolgozott feladat.

- (a) Legyen $A = (-2; 2)$ és $B = (-3; 4]$. Ábrázoljuk Descartes-féle koordináta-rendszerben az $A \times B$ halmazt.
- (b) Adjuk meg az A és B halmazokat, ha az $A \times B$ halmaz az alábbi.

**Megoldás.**

(a)



- (b) Mivel az ábrázolt pontok első komponensére $-1 \leq x < 4$ teljesül, így $A = [-1; 4)$. A második komponens pedig a $-2, 1, 3$ értékeket veszi fel, így $B = \{-2, 1, 3\}$.

1.3.11. Feladat. Határozzuk meg az alábbi A és B halmazok esetén $(A \times B)$ -t. Ábrázoljuk a kapott halmazt Descartes-féle koordináta-rendszerben.

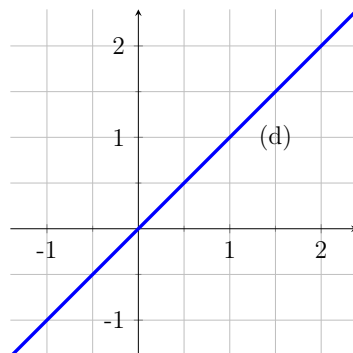
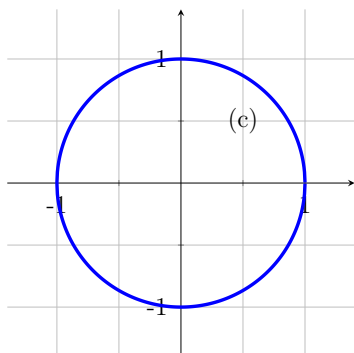
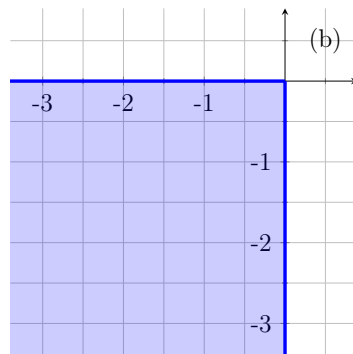
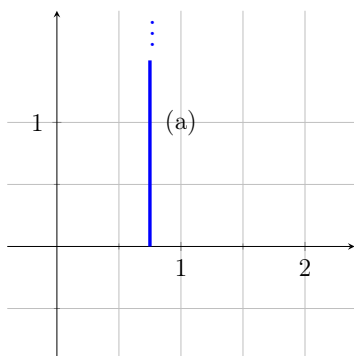
(a) $A = \{1, 3\}$, $B = \{-1, 0, 2\}$,

(b) $A = \{1, 3\}$, $B = [1; 3)$,

(c) $A = (-1; 2]$, $B = [1; 3)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: [2.3.11](#))

1.3.12. Feladat. Előállnak-e a következő (kék) ponthalmazok a valós számok részhalmazainak Descartes-szorzataként?



($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.12)

Kidolgozott feladat. Adjuk meg az alábbi bijektív leképezés inverzét.

$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x\alpha = 5x + 2$$

Megoldás. A leképezés inverze esetén a kiindulási és érkezési halmaz szerepet cserél, ez ennél a feladatnál nem túl látványos, mert a két halmaz megegyezik. Továbbá az $x\alpha = 5x + 2$ hozzárendelési szabályt, ha $y = 5x + 2$ alakban tekintjük, akkor x és y szerepét fel kell cserélnünk (ez felel meg annak, hogy a két halmaz között „megfordítjuk a nyilakat”), azaz helyette az $x = 5y + 2$ összefüggést kell vennünk, és ki kell fejezni belőle az y -t. Amiből $y = \frac{x-2}{5}$ adódik, így az α leképezés inverze

$$\alpha^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x\alpha^{-1} = \frac{x-2}{5}.$$

1.3.13. Feladat. Adjuk meg a következő bijektív leképezések inverzét.

- (a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x\alpha = 3x - 1,$
- (b) $\beta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad x\beta = \sqrt{x},$
- (c) $\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad x\gamma = (x+2)^2 - 4,$
- (d) $\delta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad x\delta = (2x+1)^2 - 1.$

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.13)

Kidolgozott feladat. Adjunk meg bijektív leképezést az $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ halmazról a $B = \{4, 5, 6, \dots\}$ halmazra a hozzárendelési szabály megadásával. Határozzuk meg a kapott bijektív leképezések inverzét.

Megoldás. Az $\alpha: \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \{4, 5, 6, \dots\}$, $x\alpha = x + 3$ leképezés egy bijektív leképezés, mert minden érkezési halmazbeli elemnek pontosan egy őse van, így létezik a leképezés inverze. Az $y = x + 3$ leképezésnél a „nyilak megfordításával” $x = y + 3$ -at kapunk, tehát $y = x - 3$, így: $\alpha^{-1}: \{4, 5, 6, \dots\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$, $x\alpha^{-1} = x - 3$.

1.3.14. Feladat. Adjunk meg bijektív leképezést az A halmazról a B halmazra a hozzárendelési szabály megadásával. Határozzuk meg a kapott bijektív leképezések inverzét.

- (a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 5, 7, 9\}$,
- (b) $A = \{1, 2, 3, \dots\}$, $B = \{2, 3, 4, \dots\}$,
- (c) $A = \{1, 2, 3, \dots\}$, $B = \{2, 4, 6, \dots\}$,
- (d) $A = \mathbb{N}$, $B = \{\text{négyzetszámok}\}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.14)

Kidolgozott feladat. Adjunk meg bijektív leképezést az $(1; 2)$ és $(-5; 22)$ nyílt intervallumok között.

Megoldás. Két nyílt intervallum között mindig létesíthetünk bijektív leképezést egy lineáris függvénnyel, mely

$$x\alpha = ax + b \quad (1.1)$$

alakú, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Már csak meg kell találnunk az a és b értékeket. Ezeket az intervallumok végpontjaihoz igazítjuk. Leképezésünk legyen mondjuk $\alpha: (1; 2) \rightarrow (-5; 22)$. Nyilván, ekkor annak kell teljesülnie a végpontokra, hogy $1\alpha = -5$ és $2\alpha = 22$. Ezen összefüggésekből, (1.1)-t felhasználva, a következő egyenletrendszer adódik:

$$\begin{aligned} a \cdot 1 + b &= -5, \\ a \cdot 2 + b &= 22. \end{aligned}$$

Egy ilyen egyenletrendszert többféleképpen megoldhatunk. Most kézenfekvő lehet az első egyenlet kivonása a másodikból, melyből azonnal $a = 27$ adódik, ahonnan, mondjuk az első egyenletből, $b = -32$. Egy megfelelő bijekció tehát

$$\alpha: (1; 2) \rightarrow (-5; 22), \quad x\alpha = 27x - 32.$$

1.3.15. Feladat. Adjunk meg bijektív leképezést a következő halmazok között, azaz igazoljuk, hogy a halmazok számossága megegyezik. (Az $(a; b)$ jelölést a valós számok a és b közötti nyitott intervallumára használjuk.)

- (a) $(0; 1)$ és $(-2; 3)$,
- (b) $(1; 6)$ és $(4; 7)$,
- (c) $(0; 1)$ és $\mathbb{R}$,
- (d) $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^+$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.15)

Kidolgozott feladat. Döntsük el, hogy megadható-e $A \rightarrow B$ bijektív leképezés, azaz megegyezik-e az A és a B halmaz számossága.

- (a) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ és $B = \mathbb{Z}$,
- (b) $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ és $B = \mathbb{Z}$,
- (c) $A = \mathbb{R}$ és $B = \mathbb{N}^{100}$.

Megoldás. Az ilyen feladatokat már nem bijektív leképezések (bijekciók) megadásával, illetve nemlétezésük bizonyításával oldjuk meg, hanem a feladatban szereplő nevezetes halmazok számosságaira fókuszálunk. Akkor és csak akkor létezik ugyanis bijekció két halmaz között, ha a számosságuk megegyezik. Az elméletből tudjuk, hogy a feladatban szereplő, nevezetes halmazok számossága

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0, \text{ és } |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}.$$

Továbbá sokszor használható ezeknél a feladatoknál a számosságáritmetika alaptétele: legyenek C és D halmazok úgy, hogy legalább az egyik végtelen (és a másik nem üres), ekkor

$$|C \cup D| = |C \times D| = \max\{|C|, |D|\}.$$

Az (a) részbeli $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmaz számossága „ $\mathfrak{c} - \aleph_0$ ” alakú. Általában, ha az $\alpha \geq \aleph_0$ és β számosságokra $\alpha > \beta$ teljesül, akkor az „ $\alpha - \beta$ ” alakú számosságok mindig α -val egyenlőek. Ennélfogva $|A| = \mathfrak{c}$, és mivel $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$, így a válasz NEM; nem létezik $A \rightarrow B$ bijekció az (a) feladatrészben.

Másik megoldás: $|(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}| = |\mathbb{R}| = \max\{|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|, |\mathbb{Q}|\}$ a számosságáritmetika alaptétele szerint. Valamint tudjuk, hogy $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ és $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, tehát $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ számossága nem lehet $\aleph_0$. Így nem létezik bijekció $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ és $B = \mathbb{Z}$ között.

A (b) részre térve, az $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ halmaz számossága „ $\aleph_0 - \aleph_0$ ” alakú. Általában az „ $\alpha - \alpha$ ” (ahol α egy tetszőleges számosság) alakú számosságokról csak annyit tudunk, hogy kisebb vagy egyenlőek, mint α , azaz jelen esetben $|A| \leq \aleph_0$, mely egyébként is eléggé triviális. Könnyű látni azonban, hogy a $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ halmaz végtelen elemszámú, és mivel a legkisebb végtelen számosság $\aleph_0$, ezért $|A| \geq \aleph_0$. Az $|A|$ -ra eddig kapott két egyenlőtlenséget összevetve $\aleph_0 \leq |A| \leq \aleph_0$, melyből adódik, hogy végig egyenlőség áll fenn, azaz $|A| = \aleph_0$. Mivel $\mathbb{Z}$ -nek is $\aleph_0$ a számossága, így a válasz IGEN, létezik bijekció a (b) részben.

A (c) részbeli $\mathbb{N}^{100}$ ugyebár $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ egy 100 tényezős szorzat. A számosságáritmetika alaptétele szerint $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \max\{\aleph_0, \aleph_0\}$, ahonnan

$$|\mathbb{N}^{100}| = \max\{\aleph_0, \dots, \aleph_0\} = \aleph_0.$$

A válasz a (c) feladatrészben tehát NEM; nem adható meg bijekció, hiszen $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

1.3.16. Feladat. Döntsük el, hogy megadható-e $A \rightarrow B$ bijektív leképezés, azaz megegyezik-e az A és a B halmaz számossága.

- | | | |
|---|---|--|
| (a) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Z}$, | (b) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Q}$, | (c) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{R}$, |
| (d) $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, B = \mathbb{N}$, | (e) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, B = \mathbb{Z}$, | (f) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, B = \mathbb{R}$, |
| (g) $A = \mathbb{N}^3, B = \mathbb{Z}$, | (h) $A = \mathbb{Q}^4, B = \mathbb{N}^2$, | (i) $A = \mathbb{R}^2, B = \mathbb{Z}^8$. |

($\leadsto$ eredmény: 2.3.16)

1.3.17. Feladat. Képzeljünk el egy szállodát, amelynek megszámlálhatóan végtelen sok szobája van, de már minden szoba foglalt.

- (a) Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki?
- (b) Újabb 999999 vendég érkezik. Hogyan lehetne őket elszállásolni?
- (c) A szomszéd utcában lévő hasonló végtelen szállodában tűz ütött ki, és onnan mindenki ebbe a szállodába menekül. Hogyan tudja őket elhelyezni a portás?

($\rightsquigarrow$ eredmény: [2.3.17](#))

1.4. Relációk

Kidolgozott feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $\alpha = \{(2, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 1), (5, 3)\}$, $\beta = \{(2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (5, 1)\}$ relációk A -n. Határozzuk meg a következő relációkat.

- (a) $\alpha \setminus \beta$,
- (b) β^{-1} ,

Megoldás.

- (a) Tekintjük azokat az elemet, amelyek α -ban szerepelnek, de β -ban nem:
 $\alpha \setminus \beta = \{(2, 1), (4, 2), (5, 3)\}$.
- (b) A β -ban szereplő elempárok komponenseinek sorrendjét felcserélve kapjuk:
 $\beta^{-1} = \{(3, 2), (2, 3), (3, 3), (1, 4), (1, 5)\}$.

1.4.1. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $\alpha, \beta \subseteq A \times A$ relációk, melyre

$$\alpha = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (4, 4), (5, 5)\} \quad \text{és} \quad \beta = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 3), (4, 5)\}.$$

Határozzuk meg a következő relációkat:

- (a) $\alpha \cap \beta$,
- (b) $\alpha \setminus \beta$,
- (c) α^{-1} ,
- (d) $\beta \cap \alpha^{-1}$.
 $(\rightsquigarrow \text{eredmény: } 2.4.1)$

1.4.2. Feladat. Tekintsük a következő relációkat. ($\mathbb{E}$ az emberek halmazát jelöli.)

$$\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x \text{ az } y \text{ gyermeke}\}, \quad \beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}, \quad \gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}.$$

Határozzuk meg a következő relációkat:

- (a) α^{-1} ,
- (b) β^{-1} ,
- (c) γ^{-1} ,
- (d) $\beta \cap \gamma$.
 $(\rightsquigarrow \text{eredmény: } 2.4.2)$

1.4.3. Feladat. Adjuk meg a $H = \{-2, 1, 2, 3, 4\}$ halmazon értelmezett

$$\rho = \{(a, b) : a \text{ osztója } b\text{-nek}\}$$

reláció gráfját. Vizsgáljuk meg reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából.

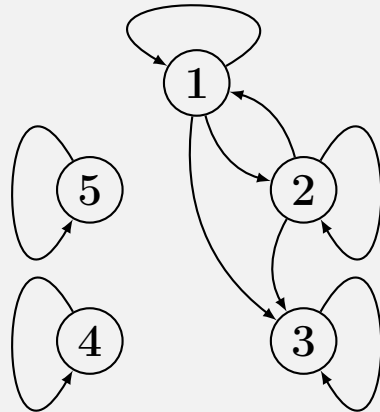
$(\rightsquigarrow \text{eredmény: } 2.4.3)$

Kidolgozott feladat. Adjunk meg a gráfjával egy-egy olyan relációt az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon, amely teljesíti az alábbi feltételeket.

- (a) reflexív, tranzitív, de nem antiszimmetrikus,
- (b) nem reflexív, szimmetrikus, nem dichotom.

Megoldás.

- (a) Például az α reláció lehet a következő gráffal megadott.

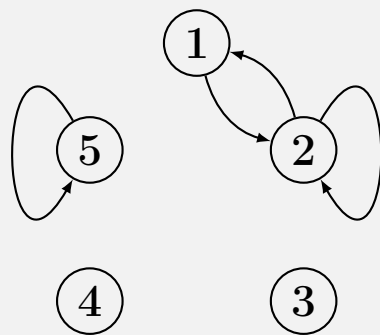


Az α reláció reflexív, mivel minden pontban van hurokél.

Tranzitív, mert tetszőleges pontok esetén, ha egyik pontból a másikba irányított él mentén eljutunk, akkor egy élen is el tudunk jutni.

Nem antiszimmetrikus, mert $(1, 2) \in \alpha$ és $(2, 1) \in \alpha$, de $1 \neq 2$.

- (b) Például a β reláció lehet a következő gráffal megadott.



A β nem reflexív, pl. $(1, 1) \notin \beta$.

Szimmetrikus, mert ha két pont között vezet egyik irányba él, akkor az ellentétes irányba is, és természetesen ez a hurokél esetén is igaz.

Nem dichotom, mert pl. $(1, 3) \notin \beta$ és $(3, 1) \notin \beta$. (Megj.: az hogy nem dichotom, abból is következik, hogy nem reflexív.)

1.4.4. Feladat. Adjunk meg a gráfjával az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon egy olyan relációt, amely

- (a) reflexív, tranzitív de nem szimmetrikus;
- (b) antiszimmetrikus, tranzitív de nem dichotom;
- (c) dichotom de nem reflexív.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.4)

Kidolgozott feladat. Vizsgáljuk meg, hogy teljesülnek-e az alábbi relációkra a megadott tulajdonságok.

- (a) $\alpha = \{(a, b) : |a - b| > 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, reflexivitás és szimmetria,
- (b) $\beta = \{(x, y) : xy = 1\} \subseteq \{-1, 1, 2, 4, 7, 10\} \times \{-1, 1, 2, 4, 7, 10\}$, antiszimmetria és dichotomia,
- (c) $\gamma = \{(x, y) : x < y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tranzitivitás és dichotomia.

Megoldás.

- (a) Az α reláció nem reflexív, mert pl. $|1 - 1| = 0 \not> 0$, így $(1, 1) \notin \alpha$. Az α reláció szimmetrikus, mert $|a - b| = |-(b - a)| = |b - a|$, így ha $(a, b) \in \alpha$, akkor $(b, a) \in \alpha$ is teljesül.
- (b) Mivel $\beta = \{(1, 1), (-1, -1)\}$, így antiszimmetrikus, mert nincs $a \neq b$, amelyre $(a, b) \in \beta$. A β reláció nem dichotom, pl. $(1, 2) \notin \beta$ és $(2, 1) \notin \beta$.
- (c) A γ reláció tranzitív, mert tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén, ha $x < y$ és $y < z$, akkor $x < z$. Nem dichotom, mert nem reflexív, sőt $x \not< x$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén.

1.4.5. Feladat. Vizsgáljuk meg az alábbi relációkat reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából. Ezek alapján állapítsuk meg, hogy melyik reláció ekvivalencia, részbenrendezés vagy teljes rendezés.

- (a) $\{(a, b) : |a - b| \leq 2\}$ a $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon,
- (b) $\{(x, y) : x \leq y\}$ az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán,
- (c) $\{(x, y) : x < y\}$ a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán,
- (d) $\{(a, b) : ab \geq 0\}$ a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán,
- (e) $\{(a, b) : a^2 \geq b^2\}$ az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán,
- (f) $\{(x, y) : |x| = |y|\}$ a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán,
- (g) $\{(x, y) : 2 \mid x + y\}$ a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazán,
- (h) $\{(a, b) : 4 \mid b - a\}$ az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán,
- (i) $\{(a, b) : a^2 < b^2\}$ az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán,
- (j) $\{(X, Y) : X \cap \mathbb{Z} = Y \cap \mathbb{Z}\}$ a $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ halmazon.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.5)

Kidolgozott feladat. Adjunk meg olyan osztályozást az $A = \{a, b, c, d, e\}$ halmazon, melynek három osztálya (blokkja) van. Adjuk meg az osztályozáshoz tartozó ekvivalenciarelációt az elemeinek felsorolásával.

Megoldás. Egy ilyen osztályozás például: $A/\rho = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}\}$.

Az ekvivalenciarelációk reflexív, szimmetrikus, tranzitív relációk. A reflexivitás miatt, minden elem saját magával relációban áll. A blokkokat úgy képeztük, hogy azok az elemek alkotják, amelyek relációban állnak, de a szimmetria miatt mindkét sorrendben szerepelnie kell az elem-pároknak. Két különböző blokk elemei viszont nem lehetnek relációban. Így a fenti osztályozás egyértelműen meghatározza a $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b), (d, d), (e, e), (d, e), (e, d)\}$ ekvivalenciarelációt.

1.4.6. Feladat. Adjon meg olyan osztályozást az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon, melynek három osztálya (blokkja) van. Adja meg az osztályozáshoz tartozó ekvivalenciarelációt.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.6)

Kidolgozott feladat. Legyen $A = \{1, 2, 4, 23, 26, 32, 47, 84\}$ és $B = \{0, 1, 3, 5, 11, 15, 16, 24\}$. Adjuk meg az alábbi ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást.

- (a) $\alpha = \{(a, b) : a\text{-nak és } b\text{-nek van azonos számjegye}\}$ az A halmazon,
- (b) $\beta = \{(a, b) : a \text{ és } b \text{ négyvel osztva ugyanannyi maradékot ad}\}$ a B halmazon.

Megoldás. Ekvivalenciarelációhoz tartozó osztályozás esetén azok az elemek kerülnek egy részhalmazba, amelyek relációban állnak egymással, így a következőket kapjuk.

- (a) $A/\alpha = \{\{1\}, \{2, 23, 26, 32\}, \{4, 47, 84\}\}$.
- (b) $B/\beta = \{\{0, 16, 24\}, \{1, 5\}, \{3, 11, 15\}\}$.

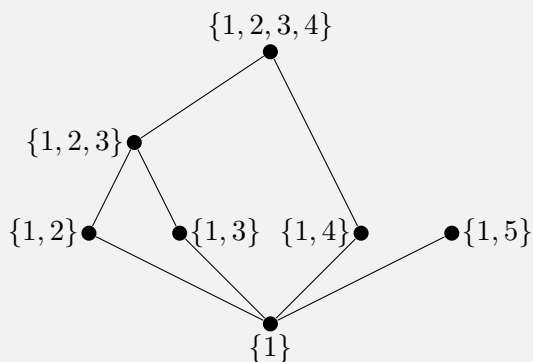
1.4.7. Feladat. Határozza meg a következő ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást.

- (a) $\{(a, b) : ab > 0\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ halmazon
- (b) $\{(a, b) : 3 \mid b - a\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon
- (c) $\{(H, G) : |H| = |G|\}$ az $A = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{\emptyset\}, \{0\}, \{a, b\}, \{1, 2, 3\}\}$ halmazon
- (d) $\{(x, y) : x\text{-nek és } y\text{-nak van közös prímosztója}\}$ az $A = \{2, 3, 8, 9, 14, 15, 19, 26\}$ halmazon
- (e) $\{(x, y) : x \text{ és } y \text{ számjegyeinek összege egyenlő}\}$ az $A = \{71, 301, 216, 4, 121, 54, 602, 315\}$ halmazon
- (f) $\{(a, b) : |a| = |b|\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
- (g) $\{(x, y) : x^2 + y^2 \text{ páros}\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.7)

Kidolgozott feladat. Legyen $A = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$. Adjuk meg az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját! Döntsük el, hogy melyek a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek.

Megoldás.



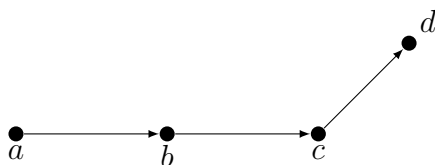
Ahogy az ábrán is látszik egyetlen minimális elem van, ami így legkisebb elem is lesz. Maximális elemből viszont kettő van, ezek nem összehasonlíthatók, így nincs legnagyobb elem.
 Minimális elem: $\{1\}$,
 maximális elemek: $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 5\}$,
 legkisebb elem: $\{1\}$,
 legnagyobb elem: nincs.

1.4.8. Feladat. Adjuk meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját. Melyek a minimális, maximális, legkisebb és legnagyobb elemek?

- (a) $(A; \subseteq)$, ahol $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$,
- (b) $(B; \subseteq)$, ahol $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$,
- (c) $(C; |)$, ahol $C = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 24, 36\}$,
- (d) $(D; |)$, ahol $D = \{0, 1, 2, 4, 7, 14, 28, 32\}$,
- (e) $(E; \sqsubseteq)$, ahol $E = \{123, 211, 321, 467, 512, 861, 999\}$ és $a \sqsubseteq b$ pontosan akkor teljesül, ha a minden számjegye kisebb vagy egyenlő, mint b megfelelő számjegye,
- (f) $(F; \leq)$, ahol $F = \{(1, 1), (\frac{1}{2}, 2), (0, -1), (\frac{1}{3}, 3), (2, 2)\}$ és $\leq$ a komponensenkénti részbenrendezés.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.8)

1.4.9. Feladat. Adjuk meg a következő gráf által meghatározott ϱ reláció tranzitív lezártját.



($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.9)

1.4.10. Feladat. Legyen $\varrho = \{(a, b) \mid a - b = 2\}$ reláció az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon. Rajzoljuk fel a ϱ gráfját és adjuk meg ϱ tranzitív lezártját.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.10)

1.4.11. Feladat. Adjuk meg a következő relációk tranzitív lezártját:

- (a) $\{(a, b) \in A^2 : |a - b| = 2\}$, ahol $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- (b) $\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a - b = 0\}$,
- (c) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = a^2\}$,
- (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x = 1\}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.11)

1.5. Kombinatorika, gráfelmélet

1.5.1. Kombinatorika

Kidolgozott feladat. Hányféleképpen sorakozhatnak fel testnevelésórán egy 18 fős osztály tanulói?

Megoldás. A sor elején álló diákat 18 tanuló közül választjuk. A második diákot már csak 17 fő közül, és így tovább, vagyis a diákok $18 \cdot 17 \cdot \dots \cdot 1 = 18!$ féleképpen sorakozhatnak fel.

1.5.1. Feladat. Tizenkét könyvet szeretnénk a könyvespolcunkon elrendezni sorban. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.1)

Kidolgozott feladat. Egy múzeumban kiállítást rendeznek, 47 beérkezett festmény közül 32-t állítanak ki. Hányféleképpen választhatnak a szervezők?

Megoldás. A korábbi példák eszköztárával dolgozva a következőképpen oldhatjuk meg a feladatot. Sorakoztassuk fel a 32 kiválasztott festményt (ezt $47 \cdot 46 \cdot \dots \cdot (47 - 32 + 1)$ féleképpen tehetjük meg), majd korrigáljunk ezen 32 festmény lehetséges sorbarendezéseivel, hiszen a feladatban ezt nem kell figyelembe venni. Így a kiválasztás $\frac{47 \cdot 46 \cdot \dots \cdot 16}{32!} = \frac{47!}{15! \cdot 32!} = \binom{47}{32}$ féleképpen történhet meg.

1.5.2. Feladat. Az ajándékboltban ötféle kristály kapható. Hányféleképpen tudunk kétfélét vásárolni?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.2)

Kidolgozott feladat. Egy cukrászdába betér egy hatfős család. Az étlapon 15 különböző sütemény szerepel. Hányféleképpen rendelhetnek, ha mindenki pontosan egy süteményt rendel?

Megoldás. Mindenki egy süteményt rendel, és mindenki rendelheti akár ugyanazt a süteményt. Így minden családtag 15 sütemény közül választ, egymástól függetlenül, ezt $15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 = 15^6$ féleképpen tehetik meg.

1.5.3. Feladat. Öt diák vizsgázik. Hányféle eredménye lehet a vizsgának, ha tudjuk, hogy egy diák sem bukott meg, és a vizsgaértékelés ötfokozatú?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.3)

1.5.4. Feladat. Egy étteremben 4 munkatárs ebédel. Az étlapon 20 különböző étel van felsorolva. Hányféleképpen rendelhetnek, ha mindenki pontosan egy ételt rendel?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.4)

Kidolgozott feladat.

Egy matematikaversenyen 14 tanuló vesz részt. Az első három helyezett díjazásban részesül. Hányféleképpen állhatnak fel a dobogóra?

Megoldás. A dobogó legfelső fokára felálló tanulót 14 fő közül választjuk. A kiválasztása után a dobogó második fokára 13 fő közül, majd a harmadik fokára 12 fő közül választunk. Ezt $14 \cdot 13 \cdot 12$ - féleképpen tehetjük meg.

Megjegyzés. A feladatot úgy is megoldhattuk volna, hogy kiválasztjuk a 3 díjazásban részesülő tanulót, majd eldöntjük, milyen sorrendben állnak fel a dobogóra. Az esetek száma ekkor $\binom{14}{3} \cdot 3!$.

1.5.5. Feladat. Egy 6 fős röplabda csapatban egy feladót és egy ütőjátékost választanak. Hányféleképpen lehet ezt megtenni, ha egy ember nem lehet egyszerre feladó és ütő is?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.5)

1.5.6. Feladat. Egy bizottságnak 7 tagja van, elnököt és elnökhelyettest választanak. Hányféleképpen lehet ezt megtenni, ha a tagok egyike sem vállalhat egynél több feladatot?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.6)

Kidolgozott feladat.

Gyöngyökből függődszt készítünk. Hányféle sorrendben fűzhetünk fel 10 fekete, 6 sárga, 9 kék és 11 piros gyöngyöt?

Megoldás. Összesen $10 + 6 + 9 + 11$ darab gyöngyöt fűzünk fel, ezek lehetséges sorrendje $(10 + 6 + 9 + 11)!$. Így azonban egyes sorrendeket többször számoltunk, mert az azonos színű gyöngyöket nem különböztetjük meg. Korrigálnunk kell, vagyis le kell osztanunk az azonos színű gyöngyök sorrendjeivel. Ez a fekete gyöngyök esetén $10!$, a sárga gyöngyök esetén $6!$, a kék gyöngyök esetén $9!$, a piros gyöngyök esetén pedig $11!$; azaz $\frac{(10 + 6 + 9 + 11)!}{10! \cdot 6! \cdot 9! \cdot 11!}$ -féle függődszt tudunk készíteni.

1.5.7. Feladat. Hányféleképpen állíthatunk sorba 5 fekete, 3 piros és 4 zöld golyót?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.7)

Kidolgozott feladat.

Hányféleképpen helyezhetünk el tizenegy embert négy szobában, ha a szobák egy, kettő, három és öt személyesek?

Megoldás. A feladatot többféleképpen is megoldhatjuk. Az egyik lehetőség, hogy sorbaállítjuk a 11 személyt, majd az első embert az első, a következő kettőt a második, az ezt követő hármat a harmadik, a maradék öt embert pedig az utolsó szobába osztjuk be (ez $11!$ számú lehetőség). Ekkor viszont egyes szobabeosztásokat többször számoltunk, mert egy szobán belül nem kell figyelembe vennünk az emberek sorrendjét. Korrigálunk, leosztunk az egyes szobákba beosztott emberek sorrendjeivel, vagyis a szobabeosztás $\frac{11!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 5!}$ -féleképpen valósulhat meg.

Megközelíthetjük a feladatot a szobakulcsok irányából is. A 11 személyt sorba állítjuk (a sorrend tetszőleges, de fix), majd szétosztjuk közöttük a szobakulcsokat. A 11 kulcsot $11!$ -féleképpen oszthatjuk ki.

Az azonos szobákhoz azonban azonos kulcs tartozik, így a megegyező kulcsok lehetséges sorbarendezéseivel le kell osztanunk. Az elhelyezés $\frac{11!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 5!}$ -féleképpen valósulhat meg.

Az egyes szobákba beosztott embereket közvetlenül is kiválaszthatjuk a sorrend figyelmen kívül hagyásával. Válasszuk ki először az egyfős, majd a kétfős, végül a háromfős szoba tagjait (ez egyértelműen meghatározza, hogy kik maradnak, vagyis kik kerülnek az utolsó, ötfős szobába). Az első szobába 11 főből 1 embert választunk, erre $\binom{11}{1}$ lehetőség van. A kétfős szobába a megmaradt 10 személy közül választunk 2-t, ezt $\binom{10}{2}$ -féleképpen tehetjük meg. A háromfős szobába már csak 8 fő közül lehet választani, így a lehetőségek száma $\binom{8}{3}$. Az egyes kiválasztások száma független a korábbi döntésektől, ezért az értékeket összeszorozzuk. A szobabeosztás $\binom{11}{1} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3}$ -féleképpen valósulhat meg.

Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha a szobák sorrendje más. Például ha először az ötfős, majd a háromfős, végül a kétfős szobába osztjuk be az embereket, a lehetőségek száma $\binom{11}{5} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2}$. *Ezen módszerrel $4 \cdot 3 \cdot 2$ -féleképpen oldhatjuk meg a feladatot.*

1.5.8. Feladat. Hányféleképpen helyezhetünk el nyolc embert három szobában, ha a szobák egy, kettő és öt személyesek?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.8)

Kidolgozott feladat. Egy üzletben ötféle gyümölcsöt lehet kapni: almát, barackot, citromot, dinnyét és epret. Hányféleképpen lehet 3 gyümölcsöt vásárolni, ha egyféle gyümölcsből többet is vehetünk?

Megoldás. Képzeljük el, hogy a kasszánál állunk, és feltesszük a szalagra a megvásárolni kívánt gyümölcsöket: valamennyi almát, barackot, citromot, dinnyét és epret. A különböző fajta gyümölcsök közé egy-egy elválasztó rudat helyezünk. Mivel ötféle gyümölcs közül választhatunk, $5 - 1 = 4$ elválasztóra van szükségünk. Így a szalagon a vásárlás pillanatában 3 gyümölcs és 4 elválasztó van. Ezek helyzete egyértelműen meghatározza, hogy melyik gyümölcsből hányat választottunk. (Például a $\boxed{\circ \circ \circ |||}$ elrendezés azt jelenti, hogy 3 almát vásároltunk; a $\boxed{| \circ | \circ | \circ}$ elrendezés esetén pedig 1 barackot, 1 citromot, és 1 epret vásároltunk.)

Annyi lehetőség van a 3 gyümölcs kiválasztására, ahányféleképpen a 3 termék és 4 elválasztó sorbarendeázhető. Lényegében kiválasztjuk, hogy a 7 pozíció melyikében álljanak a termékek, azaz a gyümölcsök; ezt $\binom{3+(5-1)}{3} = \binom{7}{3}$ -féleképpen tehetjük meg. Természetesen a 7 pozícióból a gyümölcsök helyett megválaszthatnánk az elválasztók helyét is, vagyis helyes megoldás a $\binom{3+(5-1)}{5-1} = \binom{7}{4}$ is.

Megjegyzés. A kasszaszalagos megoldást így is értelmezhetjük: Képzeljük el, hogy van három varázsdobozunk. Minden dobozban egy-egy "ízetlen" gyümölcs van. Felhelyezzük a dobozokat a szalagra, majd az $(5 - 1)$ darab elválasztót közéjük tesszük. Ekkor koppintunk a varázspálcánkcal, és a dobozokban az a gyümölcs jelenik meg, amelyet a dobozok és elválasztók kölcsönös helyzete meghatározott. Például a $\boxed{\circ \circ | \circ |||}$ elrendezésben 2 alma és 1 barack jelenik meg a szalagon. A lehetséges elrendezések számának meghatározásánál a dobozok egyformák, hiszen maga a kiválasztott elrendezés adja meg a bennük lévő gyümölcs típusát. Így 7 elemet rendezünk sorba, melyek közül 3, illetve 4 elem egyforma. A lehetséges sorrendek száma így $\frac{7!}{3! \cdot 4!}$.

1.5.9. Feladat. Egy boltban 6-féle CD-t lehet kapni. Hányféleképpen lehet 4 CD-t vásárolni, ha egyféle CD-ből többet is vehetünk?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.9)

1.5.10. Feladat. Egy üzletben ötféle szaloncukrot lehet kapni: kókuszos, vajkaramellás, zselés, gumicukros és marcipános ízűt. Hányféleképpen lehet tíz szaloncukrot vásárolni, ha minden szaloncukorból van legalább tíz?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.10)

1.5.11. Feladat. Hányféleképpen választhatunk 30 darabot 100, 200 és 500 forintos bankjegyekből, ha feltételezzük, hogy mindegyikből van legalább 30 darab?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.11)

Kidolgozott feladat.

Kincskereső játékban veszünk részt. A feladat megtalálni 11 különböző tárgyat, melyeket Szeged területén rejtettek el. A játék teljesítésére 5 napunk van. Hányféleképpen tehetünk szert az elrejtett kincsekre, ha 1 nap alatt akár az összeset megtalálhatjuk, és számít az, hogy egy adott napon milyen sorrendben találtuk meg őket?

Megoldás. Két lépésben oldjuk meg a feladatot: szétosztjuk a tárgyakat 5 napra, majd sorba állítjuk őket. Az 5 napra történő szétosztás ismerős feladat (lásd 1.5.9, 1.5.10, 1.5.11). A 11 tárgyat jelölje 11 karika, amelyeket $(5 - 1)$ darab elválasztóval szeparálunk el. (Például a

○○○○○○○○○○○|

elrendezés azt jelenti, hogy az első napon minden kincset megtaláltunk; a

○○|○○○|○○○|○○

elrendezés pedig azt mutatja, hogy az egyes napokon 2, 4, 3, 0, 2 tárgyat találtunk meg.)

A szétosztás megvalósulására annyi lehetőség van, ahányféleképpen sorba rendezhető 11 karika és 4 elválasztó. Lényegében az összes hely közül $(11 + (5 - 1))$ megválasztjuk a karikák helyét, így az esetek száma $\binom{11+(5-1)}{11}$. A tárgyak szétosztása megtörtént; azonban azt is figyelembe kell vennünk, milyen sorrendben találtuk meg őket. A 11 kincset $11!$ -féleképpen rendezhetjük sorba, függetlenül attól, hogyan oszlanak szét az 5 napra. Az elrejtett kincsekre tehát $\binom{11+(5-1)}{11} \cdot 11!$ -féleképpen tehetünk szert.

A feladatot másképpen is megoldhatjuk. Vegyük figyelembe mind a szétosztást, mind a sorrendet ugyanabban a lépésben. Ekkor 11 különböző tárgyat és $5 - 1$ azonos elválasztót állítunk sorba. Ezt $(11 + (5 - 1))! = 11!$ -féleképpen tehetjük meg, viszont így az azonos elválasztók sorrendjeit többször számoltuk. Korrigálunk az $(5 - 1)$ elválasztó lehetséges sorrendjeivel, ezek száma $(5 - 1)!$; az elrejtett kincsekre tehát $\frac{(11 + (5 - 1))!}{(5 - 1)!}$ -féleképpen tehetünk szert.

Megjegyzés. Fontos, hogy míg az első megoldásban a szétosztás során a kincseket jelző körök azonosak, addig a második megoldásban minden kincset különbözőnek tekintünk, mert a sorrendet is rögtön figyelembe vesszük.

1.5.12. Feladat. Egy turistacsoport egy város 20 nevezetességét szeretné meglátogatni 4 nap alatt. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha 1 nap alatt akár az összes nevezetesség megtekinthető, és számít az, hogy egy adott napon milyen sorrendben tekintik meg a látnivalókat?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.12)

1.5.13. Feladat. Összesen 15 különböző csomagot kell házhoz vitetnünk egy kézbesítővel 3 nap alatt. Hányféleképpen történhet a kézbesítés, ha a kézbesítő akár egy nap alatt is tud 15 csomagot kézbesíteni, és számít az is, hogy egy napon belül milyen sorrendben kézbesíti a csomagokat.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.13)

1.5.14. Feladat. Hányféleképpen helyezhetünk el 24 különböző könyvet egy 7-polcos szekrényben, ha bármelyik polcon elfér mind a 24 könyv?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.14)

Kidolgozott feladat. Az ötös lottón 90 számból 5 számot húznak ki. Hányféle 2-találatos szelvény lehetséges egy héten? (Egy szelvényen 1-től 90-ig szerepelnek a számok, melyek közül a fogadó ötöt jelöl meg.)

Megoldás. A 2-találatos szelvény azt jelenti, hogy a fogadó által megjelölt számok közül kettő szerepel a nyertes számok között, három pedig nem. Az 5 kihúzott szám közül 2 szerepel a szelvényen, erre $\binom{5}{2}$ lehetőség van. A másik három szám a fogadószelvényen nem nyert. Mivel 90 számból húznak 5 nyertes számot, $90 - 5$ szám nem nyer. A nem nyerő számok tehát $\binom{85}{3}$ -féleképpen szerepelhetnek.

Egy héten $\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3}$ darab 2-találatos szelvény lehetséges.

1.5.15. Feladat. Az ötös lottón 90 számból 5 számot húznak ki. Hányféle 3-találatos szelvény lehetséges egy héten? (Egy szelvényen 1-től 90-ig szerepelnek a számok, melyek közül a fogadó ötöt jelöl meg.)

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.15)

1.5.16. Feladat. Az ajándékboltban ötféle mesekönyv, háromféle csokoládé és hatféle játék kapható. Hányféleképpen vásárolhat egy szülő gyermekének 4 különböző ajándékot úgy, hogy pontosan 2 mesekönyv legyen köztük?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.16)

Kidolgozott feladat. Egy öttagú társaság bulizni megy. Ketten együtt mennek autóval, valamint egy ember biciklivel, kettő pedig egy tandem biciklivel közlekedik. Hányféle sorrendben érkezhettek meg a buliba, ha feltesszük, hogy a tandemesek egyszerre érkeznek, de ezt leszámítva nincs egyidejű érkezés.

Megoldás. Osszuk szét a társaság tagjait a különböző közlekedési eszközökre, majd rendezzük őket sorba. A szétoztás ismerős feladat (lásd 1.5.8). Ketten autóval mennek, erre $\binom{5}{2}$ lehetőség van. Egy ember biciklivel megy, őt már csak 3 személy közül választjuk, vagyis az esetek száma $\binom{3}{1}$. Ezzel azt is egyértelműen meghatároztuk, hogy kik mennek a buliba tandem biciklivel.

A szétoztás után az elemeket sorbarendezzük. Mivel a két tandemes egyszerre érkezik, őket „összeragasztjuk”, és egy elemként kezeljük. Így 4 elemet állítunk sorba $4!$ -féleképpen.

A társaság tagjai tehát $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot 4!$ -féleképpen érkezhettek meg a buliba.

Megjegyzés. Természetesen a tagok szétoztását a közlekedési eszközökre többféleképpen megtehettük volna. Például ha először a biciklist, majd a tandemeseket választjuk ki, az esetek száma $\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{2}$.

1.5.17. Feladat. Egy négytagú társaság a következőképpen akar feljutni egy tetőteraszra: ketten lifttel mennek egyszerre, ketten pedig egymás után mászva a villámhárítón jutnak fel. Hányféle sorrendben érkezhetnek meg a teraszra, ha feltesszük, hogy a lifttel utazó két személy egyszerre érkezik, de ezt leszámítva nincs egyidejű érkezés.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.17)

Kidolgozott feladat.

Az a, b, c, d, e, f betűk sorbarendezései között hány olyan van, amelyben az e és f betűk **nem** egymás mellett állnak?

Megoldás. A feladatot a legegyszerűbben úgy oldhatjuk meg, ha az összes sorbarendezések számából levonjuk a „rossz” esetek számát (rossz eset = e és f egymás mellett áll). A 6 különböző betűt $6!$ -féleképpen állíthatjuk sorba, ez az összes esetek száma.

A rossz esetekben az e és f egymás mellett áll. Mivel ők csak párban fordulhatnak elő, egy „összeragasztott” elempárként tekintünk rájuk. Az így kapott 5 elem lehetséges sorrendjeinek száma $5!$. Mivel azonban az összeragasztott párban az e és f egymáshoz viszonyítva kétféle sorrendben állhat ($e - f$ vagy $f - e$), ezzel korrigálva a rossz esetek száma $5! \cdot 2$.

A feladat megoldása tehát $6! - 5! \cdot 2$.

1.5.18. Feladat. Hányféleképpen ültetheti le Hófehérke a hét törpét egy padra úgy, hogy Tudor és Morgó ne üljön egymás mellett?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.18)

1.5.19. Feladat. Az a, b, c, d, e, f betűk sorbarendezései között hány olyan van, amelyben az a, b, c betűk nem egymás mellett állnak? (Bármely kettő állhat egymás mellett, de mind a három már nem!)

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.19)

1.5.2. Gráfelmélet

1.5.20. Feladat. Lehetséges-e, hogy

- (a) egy 5-tagú társaságban mindenkinek 3 ismerőse van?
- (b) egy 4-tagú társaságban mindenkinek 3 ismerőse van?

Az ismeretségek kölcsönösek.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.20)

1.5.21. Feladat. Egy verseny során 8 csapat játszik körmérkőzést (azaz a végén mindenki mindenkiel játszani fog). Előfordulhat-e, hogy egy adott pillanatban 1, 2, 2, 2, 4, 5, 7, 7 mérkőzést játszottak már le a csapatok?

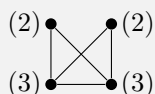
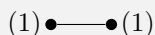
($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.21)

Kidolgozott feladat. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a csúcsok fokszámai az alábbiak? Ha igen, adjuk meg, hogy izomorfia erejéig hány ilyen gráf van. Határozzuk meg az ilyen gráfok éleinek a számát.

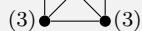
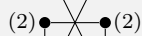
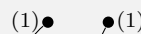
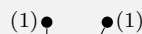
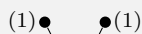
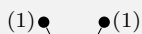
- (a) 1, 2, 2, 3, 3 (b) 1, 2, 2, 3, 4, 6, 6 (c) 1, 1, 2, 2, 3, 3

Megoldás.

- (a) A csúcsok fokszámainak összege $1 + 2 + 2 + 3 + 3 = 11$. Mivel tetszőleges gráfban a csúcsok fokszámainak összege páros szám, nincs ilyen gráf.
- (b) A csúcsok fokszámainak összege páros szám. Kezdjük el felrajzolni a gráfot! Van két 6-fokú csúcs, így minden más csúcsba legalább 2 él fut be, vagyis minden további csúcs fokszáma minimum 2. A megadott fokszámok alapján nincs ilyen gráf.
- (c) A csúcsok fokszámainak összege páros szám. Próbáljunk meg felrajzolni egy gráfot, amely megfelel a feltételeknek! Például:



Izomorfia erejéig összesen 5 gráfot találunk, ezek a következők:



A gráfok éleinek száma a fokszámok összegének fele, azaz $\frac{1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3}{2} = 6$.

1.5.22. Feladat. Lehetséges-e, hogy egy 5-pontú egyszerű gráf pontjainak fokszámai 1, 2, 2, 2, 3 legyenek? Ha igen, adjuk meg, hogy izomorfia erejéig hány ilyen gráf van. Határozzuk meg az ilyen gráfok éleinek a számát.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.22)

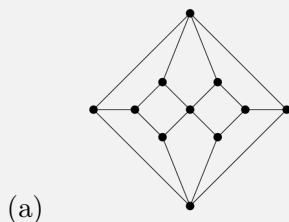
1.5.23. Feladat. Rajzoljunk olyan 5-pontú, egyszerű gráfot, amelynek két 3-fokú és két 4-fokú pontja van. Adjuk meg, hogy izomorfia erejéig hány ilyen gráf van. Határozzuk meg az ilyen gráfok éleinek a számát.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.23)

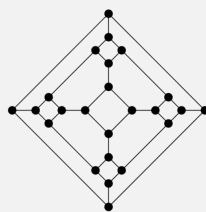
1.5.24. Feladat. Egy 6-pontú, egyszerű gráf pontjainak fokszámai: 2, 2, 3, 3, 5, 5. Hány ilyen gráf van izomorfia erejéig? Határozzuk meg az ilyen gráfok éleinek a számát.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.24)

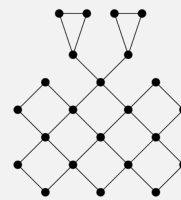
Kidolgozott feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a következő gráfokban van-e Hamilton-út, Hamilton-kör. A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatók itt: [online Hamilton-út kereső](#)



(a)



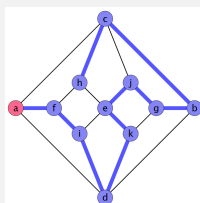
(b)



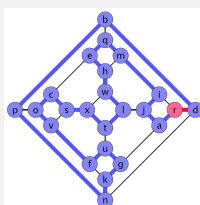
(c)

Megoldás.

(a) Találunk Hamilton-utat, de Hamilton-kört nem. Például:

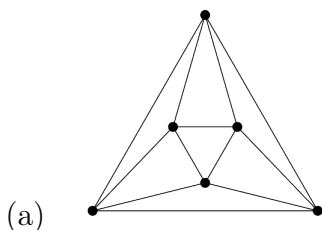


(b) Találunk Hamilton-kört, így Hamilton-utat is. Például:

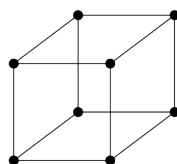


(c) Találunk olyan csúcsot, melyet elhagyva a hozzá kapcsolódó élekkel együtt, a gráf 3 komponensre esik szét. Ez alapján a gráfban nincs Hamilton-út, amelyből következik, hogy Hamilton-kör sincs.

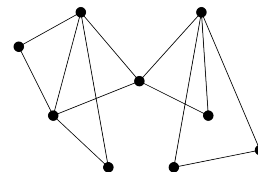
1.5.25. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a következő gráfokban van-e Hamilton-út, Hamilton-kör. A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatók itt: [online Hamilton-út kereső](#)



(a)



(b)

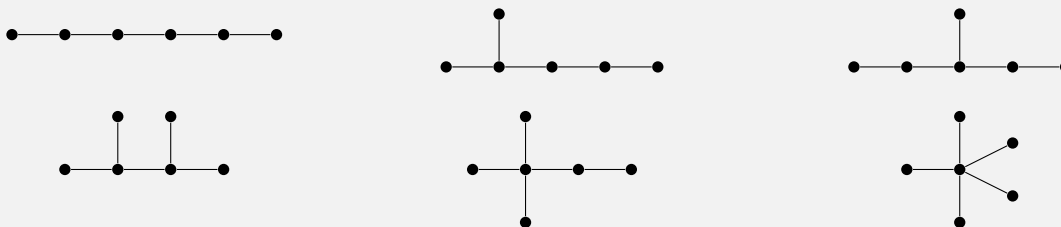


(c)

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.25)

Kidolgozott feladat. Izomorfia erejéig hány fa van, ami 6-pontú?

Megoldás. Izomorfia erejéig hat ilyen fát találunk, ezek az alábbiak:



Megjegyzés. Érdekes a leghosszabb út hossza alapján megkeresni a fákat. Ebben a feladatban a fáknak a leghosszabb út hossza balról jobbra haladva 5, 4, 4 (felső sor), és 3, 3, 2 (alsó sor).

1.5.26. Feladat. Izomorfia erejéig hány fa van, ami

- (a) 4-pontú?
- (b) 5-pontú?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.26)

1.5.27. Feladat. Izomorfia erejéig hány fa van, ami

- (a) 4-élű?
- (b) 5-élű?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.27)

Kidolgozott feladat. Egy 12-pontú fának 10 darab 1-fokú pontja (levele) van.

- (a) Mennyi lehet a további két pont fokszáma?
- (b) Hány élt tartalmaz a leghosszabb útja?
- (c) Izomorfia erejéig hány ilyen fa van?

Megoldás.

- (a) Két szabályt használunk fel. Először is tudjuk, hogy minden fában az élek számát megkapjuk, ha a csúcsok számából egyet levonunk; azaz ebben a gráfban $12 - 1 = 11$ él van. Emellett minden gráfban igaz, hogy az élek száma a fokszámok összegének felével egyezik meg.

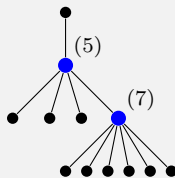
Jelölje a két további csúcs (ld. kitüntetett pontok) fokszámát x és y . Ekkor az alábbi összefüggés írható fel:

$$11 = \frac{10 \cdot 1 + x + y}{2},$$

melyből $x + y = 12$. Mivel több 1-fokú pont nem lehet a gráfban, a kitüntetett pontok bármelyikének fokszáma legalább 2. A lehetséges $x - y$ párok tehát a 2 és 10, 3 és 9, 4 és 8, 5 és 7, valamint 6 és 6.

A további két pont fokszáma 2 és 10 között bármilyen egész értéket felvehet.

(b) Rajzoljuk fel egy lehetséges gráfot! Legyen $x = 5$ és $y = 7$.



A gráfban a következő kapcsolatokat látjuk: él kapcsolja össze a kitüntetett csúcsokat, illetve ezen csúcsokhoz kapcsolódnak az 1-fokú pontok, azaz levelek. Bármely másik gráfban, amelyben a kitüntetett pontok fokszámainak összege 12, ugyanezen kapcsolatrendszert fedezhetjük fel. A leghosszabb utat akkor kapjuk, ha az egyik levélből a kitüntetett csúcsokon át átjutunk egy másik levélbe. Azaz a leghosszabb út minden esetben 3 élt tartalmaz.

(c) A fenti indoklás alapján, mivel a kitüntetett pontok fokszáma minimum 2, illetve összegük 12, összesen 5 számpár felel meg a feltételeknek. Tehát izomorfia erejéig 5 ilyen fa van.

1.5.28. Feladat. Egy 20-pontú fának 18 darab 1-fokú pontja (levele) van.

- (a) Mennyi lehet a további két pont fokszáma?
- (b) Hány élt tartalmaz a leghosszabb útja?
- (c) Izomorfia erejéig hány ilyen fa van?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.28)

Kidolgozott feladat. Hány fából állhat egy olyan erdő, aminek 11 csúcsa és 7 éle van?

Megoldás. Mivel minden fában eggyel kevesebb él van, mint ahány csúcs, az erdő $11 - 7 = 4$ fából áll.

1.5.29. Feladat. Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány pontja van az erdőnek?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.29)

1.5.30. Feladat. Izomorfia erejéig hány erdő van, ami

- (a) 3-pontú?
- (b) 4-pontú?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.30)

1.6. Teljes indukció, rekurzív definíció, indirekt bizonyítás

1.6.1. Teljes indukció

Kidolgozott feladat. Mutassuk meg, hogy az első n darab ($n \in \mathbb{N}$) páros természetes szám összege éppen $n(n+1)$.

Megoldás. Az állítást n szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

1. Az állítás $n = 1$ esetén igaz, mivel $2 = 1 \cdot (1 + 1)$.
2. Tegyük fel, hogy valamely $n \geq 1$ természetes számra igaz az állítás, azaz $2 + 4 + \dots + 2n = n(n+1)$.
3. Tekintsük az állítást $(n+1)$ -re:

$$\begin{aligned} 2 + 4 + \dots + 2n + 2(n+1) &= \underbrace{(2 + 4 + \dots + 2n)}_{n(n+1) \text{ (ind. felt.)}} + 2(n+1) \\ &= n(n+1) + 2(n+1) \\ &= (n+1)(n+2). \end{aligned}$$

Azaz az állítás $(n+1)$ -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül az állítás.

1.6.1. Feladat. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy tetszőleges n természetes számra

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

teljesül. Bizonyítsuk az állítást a Gauss-féle gondolatmenet alapján is (teljes indukció nélkül).

($\rightsquigarrow$ megoldás: 2.6.1)

1.6.2. Feladat. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy tetszőleges n természetes számra

$$1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$$

teljesül. Bizonyítsuk az állítást „geometria” eszközökkel is (teljes indukció nélkül).

($\rightsquigarrow$ megoldás: 2.6.2)

1.6.3. Feladat. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy tetszőleges n természetes számra

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

teljesül.

($\rightsquigarrow$ megoldás: 2.6.3)

1.6.4. Feladat. Hol a hiba a következő bizonyításban?

Állítás: Bármely $n \in \mathbb{N}$ -re $a^{n-1} = 1$, ahol a tetszőleges pozitív valós szám.

Bizonyítás: Ha $n = 1$, akkor $a^{n-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$.

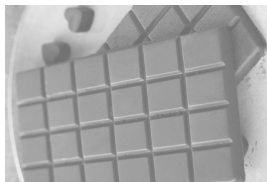
Tegyük fel, hogy az állítás igaz tetszőleges olyan $k \in \mathbb{N}$ esetén, ahol $1 \leq k \leq n$. Ekkor $(n+1)$ -re a következőt kapjuk:

$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \cdot a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

Tehát az állítás igaz $(n+1)$ -re is.

($\rightsquigarrow$ megoldás: 2.6.4)

1.6.5. Feladat. Egy tábla csokoládét szeretnénk teljesen feldarabolni, ahol a tábla $m \times n$ kisebb „kockából” áll. Minimum hány törésre van szükség?



($\rightsquigarrow$ megoldás: 2.6.5)

1.6.6. Feladat. Igazoljuk, hogy $4 \mid 7^n + 3^{n+1}$ teljesül tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén. (Azaz 4 osztója $7^n + 3^{n+1}$ -nek tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén.)

($\rightsquigarrow$ megoldás: 2.6.6)

1.6.7. Feladat. Igazoljuk, hogy $7 \mid 2^{n+2} + 3^{2n+1}$ teljesül tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén. (Azaz 7 osztója $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ -nek tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén.)

($\rightsquigarrow$ megoldás: 2.6.7)

1.6.8. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges n természetes számra

$$\sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = n^3$$

teljesül.

($\rightsquigarrow$ megoldás: 2.6.8)

1.6.9. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n természetes számra

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

($\rightsquigarrow$ megoldás: 2.6.9)

1.6.10. Feladat. Legyen H a természetes számok részhalmazainak olyan halmaza, amely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy ha $A_1, A_2 \in H$, akkor $A_1 \cap A_2$ is H -ban van. Mutassuk meg, hogy tetszőleges n természetes számra, ha $A_1, \dots, A_n \in H$, akkor az

$$A_1 \cap \cdots \cap A_n$$

halmaz is eleme H -nak.

($\rightsquigarrow$ megoldás: 2.6.10)

1.6.2. Rekurzív definíció

Kidolgozott feladat. Legyen $a_1 = a_2 = 1$ és $a_n = a_{n-2} + 2$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$). Mutassuk meg, hogy

$$a_n = \frac{1}{2}(2n - 1 - (-1)^n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Megoldás. Az állítást n szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

1. Az állítás $n = 1, 2$ esetén igaz, mivel $a_1 = 1 = \frac{1}{2}(2 \cdot 1 - 1 - (-1)^1)$ és $a_2 = 1 = \frac{1}{2}(2 \cdot 2 - 1 - (-1)^2)$.
2. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $1 \leq k \leq n$ esetén valamely n természetes számra, azaz

$$a_k = \frac{1}{2}(2k - 1 - (-1)^k) \quad (1 \leq k \leq n).$$

3. Tekintsük az állítást $(n+1)$ -re:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \underbrace{a_{n-1}}_{\frac{1}{2}(2(n-1)-1-(-1)^{n-1}) \text{ (ind. felt.)}} + 2. \\ &= \frac{1}{2}(2(n-1) - 1 - (-1)^{n-1}) + 2 \\ &= \frac{1}{2}(2n - 2 - 1 - (-1)^{n-1} + 4) \\ &= \frac{1}{2}(2(n+1) - 1 - (-1)^{n+1}). \end{aligned}$$

Azaz $k = n+1$ -re is igaz az állítás, ezért –az indukciós feltétel következtében– $1 \leq k \leq n+1$ esetén is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül az állítás.

1.6.11. Feladat. Az a_n ($n \in \mathbb{N}$) sorozat elemeit az alábbi rekurzió definiálja:

$$a_1 = 2, \quad a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Mutassuk meg, hogy $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

($\rightsquigarrow$ megoldás: [2.6.11](#))

1.6.12. Feladat. Az a_n ($n \in \mathbb{N}$) sorozat elemeit az alábbi rekurzió definiálja:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 8, \quad a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 3).$$

Mutassuk meg, hogy $a_n = 3^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

($\rightsquigarrow$ megoldás: [2.6.12](#))

1.6.13. Feladat. Definiáljuk rekurzív módon az $a_n = 3n + 2$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozatot.

($\rightsquigarrow$ megoldás: [2.6.13](#))

1.6.14. Feladat. Definiáljuk rekurzív módon az $a_n = n^2 + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozatot.

($\rightsquigarrow$ megoldás: [2.6.14](#))

1.6.15. Feladat. Tegnap kisebb sérülést szenvedtem, ezért az emeletre vezető lépcsőn csak úgy tudok felmenni, hogy egyet vagy kettőt lépek. Hányféleképpen mehetek fel a lépcsőn, ha annak 15 lépcsőfoka van?

($\rightsquigarrow$ megoldás: 2.6.15)

1.6.16. Feladat. Az előző feladatban szereplő lépcsőn szeretnék ismét felmenni, de már meggyógyultam, így hármat is tudok lépni. Hányféleképpen mehetek fel a lépcsőn?

($\rightsquigarrow$ megoldás: 2.6.16)

1.6.17. Feladat. Legyen $f(1) = f(2) = 1$, valamint $n \geq 2$ esetén

$$f(n) = \begin{cases} n - f\left(\frac{n}{2}\right), & \text{ha } n \text{ páros} \\ f\left(\frac{n-1}{2}\right) + f\left(\frac{n+1}{2}\right), & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg $f(3), \dots, f(12)$ értékét. Mivel egyenlő $f(2025)$?

($\rightsquigarrow$ megoldás: 2.6.17)

1.6.18. Feladat. Legyen $a_1 = 2$ és $a_n = 3a_{n-1} + 4$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$). Találjuk meg a sorozat zárt (nem rekurzív) alakját, vagyis adjunk meg képletet a_n -re n függvényében.

($\rightsquigarrow$ megoldás: 2.6.18)

1.6.3. Indirekt bizonyítás

Kidolgozott feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b természetes számokra, ha $a + b > 100$, akkor $a > 50$ vagy $b > 50$.

Megoldás. Tegyük fel, hogy $a + b > 100$ de nem teljesül az, hogy $a > 50$ vagy $b > 50$. Ekkor $a, b \leq 50$ következtében az $a + b \leq 100$ egyenlőtlenséget kapjuk, ami ellentmond annak, hogy $a + b > 100$. Tehát az a feltevésünk, miszerint nem teljesül az, hogy $a > 50$ vagy $b > 50$, nem volt helyes.

1.6.19. Feladat. Mutassuk meg, hogy végtelen sok prímszám van.

($\rightsquigarrow$ megoldás: 2.6.19)

1.6.20. Feladat. Mutassuk meg, hogy $\sqrt{2}$ nem racionális szám.

($\rightsquigarrow$ megoldás: 2.6.20)

1.6.21. Feladat. Indirekt módon bizonyítsuk be, hogy a $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg q)$ formula logikai értéke mindig igaz.

($\rightsquigarrow$ megoldás: 2.6.21)

1.6.22. Feladat. Indirekt módon bizonyítsuk be, hogy a $(p \vee q) \rightarrow ((p \vee \neg q) \rightarrow p)$ formula logikai értéke mindig igaz.

($\rightsquigarrow$ megoldás: 2.6.22)

1.6.23. Feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges n természetes számra, ha $4^n - 1$ prímszám, akkor n páratlan.

($\rightsquigarrow$ megoldás: 2.6.23)

1.6.24. Feladat. Mutassuk meg, hogy négy egymást követő természetes szám szorzata nem lehet négyzetszám.

($\rightsquigarrow$ megoldás: [2.6.24](#))

1.7. Számrendszerek, Számelmélet

1.7.1. Számrendszerek

Kidolgozott feladat. Váltuk át a következő számokat decimális (tízes) számrendszerbe. (Az, hogy milyen számrendszerben van felírva a szám, a jobb alsó indexben található.)

- (a) 1011011_2 ,
(b) $56B_{16}$.

Megoldás.

- (a) Az 1011011_2 számnak írjuk fel a bináris számrendszerbeli helyiérték-táblázatát. A helyi értékek a számrendszer alapszámának hatványai lesznek.

Helyi érték:	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	1	0	1	1	0	1	1

A decimális számrendszerbe való átváltáshoz szorozzuk meg minden számjegyet a hozzá tartozó helyi értékkel, majd adjuk össze a kapott értékeket:

$$1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 16 + 8 + 2 + 1 = 91.$$

Ezért 1011011_2 a decimális számrendszerben 91_{10} .

- (b) Ismét a helyiérték-táblázat felírásával kezdünk, viszont most a szám 16-os számrendszerben van megadva, így a helyi értékek is a 16 hatványai lesznek.

Helyi érték:	16^2	16^1	16^0
	5	6	B

Az $56B_{16}$ decimális számrendszerbe való átváltása, figyelembe véve, hogy $B_{16} = 11_{10}$:

$$56B_{16} = 5 \cdot 16^2 + 6 \cdot 16^1 + B \cdot 16^0 = 5 \cdot 256 + 6 \cdot 16 + 11 \cdot 1 = 1387_{10}.$$

1.7.1. Feladat. Váltuk át a következő számokat decimális (tízes) számrendszerbe. (Az, hogy milyen számrendszerben van felírva a szám, a jobb alsó indexben található.)

- (a) 10011_2 , (b) 10011010_2 ,
(c) 11110111_2 , (d) 10100011_2 ,
(e) $A3_{16}$, (f) 129_{16} ,
(g) $13A_{16}$, (h) $25F_{16}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: [2.7.1](#))

Kidolgozott feladat. Váltuk át a 75_{10} , decimális (tízes) számrendszerben megadott számot

- (a) bináris (kettes) számrendszerbe, majd ellenőzésként írjuk fel a 75-öt 2-hatványok összegeként is,
- (b) hexadecimális (tizenhatos) számrendszerbe.

Megoldás.

- (a) A 75-öt maradékosan osztjuk az új számrendszer alapszámával, azaz 2-vel. A hányadost írjuk a 75 alá, a maradékot pedig a 75 mellé. Ezután a kapott hányadosra ismételjük meg az eljárást. Ezt egészen addig folytatjuk, míg a hányados végül 0 nem lesz:

	maradék
75	1
37	1
18	0
9	1
4	0
2	0
1	1
0	

A maradékokat alulról felfelé összeolvasva megkapjuk a 75 bináris számrendszerbeli alakját: 1001011_2 .

Ellenőrzés:

$$75 = 64 + 8 + 2 + 1 = 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0,$$

amelyből látható, hogy $75_{10} = 1001011_2$ valóban teljesül.

- (b) Az (a) részhez hasonlóan maradékos osztást végzünk, viszont most az új számrendszer alapszáma 16, így 16-tal osztunk. A maradékok jegyzésénél pedig ügyelünk arra, hogy ha egy maradék 10, 11, 12, 13, 14 vagy 15, akkor a neki megfelelő betűt írjuk, azaz rendre az A, B, C, D, E, F jelölést használjuk.

	maradék
75	$B (= 11)$
4	4
0	

Ezért $75_{10} = 4B_{16}$.

1.7.2. Feladat. Váltuk át bináris (kettes) számrendszerbe a következő decimális (tízes) számrendszerben megadott számokat. Ellenőzésként írja fel a számot 2-hatványok összegeként is.

- (a) 39_{10} , (b) 73_{10} ,
- (c) 141_{10} , (d) 200_{10} .

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.2)

1.7.3. Feladat. Váltuk át hexadecimális (tizenhatos) számrendszerbe a következő decimális (tízes) számrendszerben megadott számokat.

- (a) 73_{10} , (b) 259_{10} ,
 (c) 299_{10} , (d) 319_{10} .

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.3)

Kidolgozott feladat. Váltuk át hexadecimális számrendszerbe a következő bináris számrendszerben megadott számot: 111010110_2 .

Megoldás. Mivel 16 a 2-nek negyedik hatványa, a 111010110_2 számjegyeit hátulról kezdve négyesével csoportosítjuk:

$$1 \quad 1101 \quad 0110.$$

A kialakult blokkokat külön-külön váltjuk át hexadecimális számrendszerbe: $1_2 = 1_{16}$, $1101_2 = 13_{10} = D_{16}$ és $0110_2 = 6_{16}$. A kapott számokat a blokkok sorrendjében összeolvasva a 111010110_2 hexadecimális számrendszerbeli alakjához jutunk: $1D6_{16}$.

1.7.4. Feladat. Váltuk át hexadecimális számrendszerbe a következő bináris számrendszerben megadott számokat.

- (a) 1011_2 , (b) 111010_2 ,
 (c) 110110_2 , (d) 10010011_2 ,
 (e) 11001001_2 , (f) 1010011101_2 ,
 (g) 1011101110011100_2 .

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.4)

Kidolgozott feladat. Váltuk át bináris számrendszerbe a következő hexadecimális számrendszerben megadott számot: $3E2_{16}$.

Megoldás. A $3E2_{16}$ számjegyeit egyesével váltjuk át bináris számrendszerbe úgy, hogy mindegyiket egy-egy négy számjegyből álló szám reprezentáljon. (Ha az átváltandó számjegy értéke miatt nem is lenne rá szükség, akkor is 4 számjegyet használunk.) Így kapjuk, hogy $3_{16} = 0011_2$, $E_{16} = 14_{10} = 1110_2$, végül $2_{16} = 0010_2$. Ezután a négyes blokkokat az eredeti sorrendben egymásután fűzve megkapjuk a keresett bináris számrendszerbeli alakot:

$$3E2_{16} = 0011 \quad 1110 \quad 0010_2 = 001111100010_2.$$

A szám elejéről a felesleges nullákat most már elhagyhatjuk: $3E2_{16} = 1111100010_2$.

1.7.5. Feladat. Váltuk át bináris számrendszerbe a következő hexadecimális számrendszerben megadott számokat.

- (a) AB_{16} , (b) $4F_{16}$,
 (c) $F1_{16}$, (d) 234_{16} .

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.5)

Kidolgozott feladat. Írjuk át a következő tizedestörtöket bináris számrendszerbe. Ha hamarabb nem ér véget az algoritmus, akkor 5 számjegyig számoljuk a törtrészt.

- (a) $0,8125_{10}$
 (b) $0,22_{10}$

Megoldás.

- (a) A számolást érdemes táblázatba foglalni. A $0,8125$ -et megszorozzuk 2-vel (hiszen bináris számrendszerbe szeretnénk átváltani), majd az eredmény egészrészét a táblázat bal oldali, törtrészét pedig a táblázat jobb oldali oszlopába írjuk. Ezután a kapott törtrészre ugyanezt megismételjük. Az algoritmus akkor ér véget, amikor törtrészként 0-t kapunk.

egészrész	
	0,8125
1	0,625
1	0,25
0	0,5
1	0

A kapott egészrészeket fentről lefelé összeolvasva megkapjuk a $0,8125_{10}$ bináris számrendszerbeli alakját: $0,1101_2$.

- (b) Az (a) feladat mintájára számolunk. Mivel hamarabb nem ér véget az algoritmus (nem lesz a törtrész 0), az 5. számjegy után abbahagyjuk a számolást.

egészrész	
	0,22
0	0,44
0	0,88
1	0,76
1	0,52
1	0,04

Az egészrészeket fentről lefelé összeolvasva kapjuk, hogy $0,22_{10} \approx 0,00111_2$.

1.7.6. Feladat. Írjuk át a következő tizedestörtöket bináris számrendszerbe. Ha hamarabb nem ér véget az algoritmus, akkor 5 számjegyig számoljuk a törtrészt.

- (a) $0,3_{10}$, (b) $0,4_{10}$,
 (c) $0,12_{10}$, (d) $0,36_{10}$,
 (e) $0,375_{10}$, (f) $12,4_{10}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.6)

Kidolgozott feladat. Végezzük el a következő összeadásokat abban a számrendszerben, amiben a számok meg vannak adva.

- (a) $10101_2 + 1110_2$,
 (b) $24D1_{16} + 1AB3_{16}$.

Megoldás.

- (a) A két számot írjuk le úgy, hogy az azonos helyi értéken lévő számjegyek kerüljenek egymás alá. Az összeadást a legkisebb helyi értékkel kezdjük:

$$\begin{array}{r} 10101 \\ + 1110 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10101 \\ + 1110 \\ \hline 11 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10101 \\ + 1110 \\ \hline 011 \end{array}$$

A 3. lépésben az $1 + 1$ összeadást kellett elvégeznünk. Mivel $1 + 1 = 2$, ami bináris számrendszerben 10_2 -nak felel meg, tehát nem egyetlen számjegy, ezért csak a 0-t írjuk le, az 1-et visszük tovább. A 4. lépésben így $0 + 1 + (1) = 2$ miatt ismét csak a 0-t írjuk le, és megint visszük tovább az 1-et. Az 5. lépésben hasonlóan, $1 + (1) = 2 = 10_2$, leírjuk a 0-t, visszük tovább az 1-et, amit, mivel már elfogytak a számjegyek az összeadandókban, most már leírhatunk.

$$\begin{array}{r} 10101 \\ + 1110 \\ \hline 0011 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10101 \\ + 1110 \\ \hline 100011 \end{array}$$

Tehát $10101_2 + 1110_2 = 100011_2$.

A számolás tömörebb formában, a továbbvitt 1-esek jobb alsó indexben történő jelölésével a következő módon írható le:

$$\begin{array}{r} 10101 \\ + 1110 \\ \hline 100011 \end{array}$$

- (b) Az (a) részhez hasonlóan adjuk össze a számokat. A 2. lépésben, mivel $D_{16} + B_{16} = 13_{10} + 11_{10} = 24_{10} = 16_{10} + 8_{10} = 18_{16}$, csak a 8-at írjuk le, az 1-et visszük tovább. A 3. lépésben így a $4_{16} + A_{16} + (1_{16})$ összeget kell kiszámolnunk, ami $4_{16} + A_{16} + 1_{16} = 4_{10} + 10_{10} + 1_{10} = 15_{10} = F_{16}$ lesz.

$$\begin{array}{r} 24D1 \\ + 1AB3 \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24D1 \\ + 1AB3 \\ \hline 84 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24D1 \\ + 1AB3 \\ \hline F84 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24D1 \\ + 1AB3 \\ \hline 3F84 \end{array}$$

Így $24D1_{16} + 1AB3_{16} = 3F84_{16}$.

Tömörebb formában, a továbbvitt 1-esek jelölésével:

$$\begin{array}{r} 24D1 \\ + 1A_1B3 \\ \hline 3F84 \end{array}$$

1.7.7. Feladat. Végezzük el a következő összeadásokat abban a számrendszerben, amiben a számok meg vannak adva. A számolás során jelöljük a továbbvitt számjegyeket is.

(a) $100110_2 + 101101_2$,

(b) $110110_2 + 10011_2$,

(c) $1010111_2 + 110110_2$,

(d) $1001011_2 + 101101_2$,

(e) $A34F_{16} + 215_{16}$,

(f) $13A4_{16} + F29_{16}$,

(g) $253A_{16} + D4B_{16}$,

(h) $12BA_{16} + 39A7_{16}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.7)

1.7.2. Számelmélet

1.7.8. Feladat. Adjuk meg a 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 8-cal, 9-cel, 10-zel való oszthatóságra vonatkozó ismert szabályokat.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.8)

Kidolgozott feladat. Bontsa prímszorzatokra a 300 és a 252 természetes számokat, és határozza meg a (pozitív) osztók számát. Továbbá, a prímszorzatos felbontást felhasználva, adja meg a 300 és 252 legnagyobb közös osztóját és a legkisebb közös többszörösét.

Megoldás. Először prímszorzatokra bontjuk a számokat:

	osztó		osztó
300	2	252	2
150	2	126	2
75	3	63	3
25	5	21	3
5	5	7	7
1		1	

A táblázatok alapján leolvasható a prímszorzatos felbontás:

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2, \quad 252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Az osztók szám a prímszorzatok kitevőire egyet adva a következőképpen kapható meg:

$$\tau(300) = (2+1)(1+1)(2+1) = 18 \text{ és } \tau(252) = (2+1)(2+1)(1+1) = 18.$$

A legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös könnyen leolvasható, ha azokat a prímszorzatokat, amelyek csak az egyik szám felbontásában szerepelnek, a másik számban nulla kitevővel tüntetjük fel: $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^0$, $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7$. Ekkor a legnagyobb közös osztót úgy kapjuk az egyes prímszorzatokat a megfelelő kitevők minimumára emeljük, míg a legkisebb közös többszörös esetén a kitevők maximumát vesszük:

$$\text{lko}(300, 252) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 12, \quad \text{lkkt}(300, 252) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 6300.$$

1.7.9. Feladat. Bontsuk prímszorzatokra a következő természetes számokat, és határozzuk meg a pozitív osztók számát.

(a) 88,

(b) 140,

(c) 360,

(d) 495,

(e) 2310,

(f) 2808.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.9)

1.7.10. Feladat. Bontsuk prímszorzattényezőkre a következő a , b természetes számokat, és határozzuk meg a legnagyobb közös osztójukat és a legkisebb közös többszörösüket.

(a) $a = 40$, $b = 84$,(b) $a = 42$, $b = 77$,(c) $a = 88$, $b = 60$,(d) $a = 140$, $b = 126$,(e) $a = 360$, $b = 108$,(f) $a = 495$, $b = 525$.($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.10)

1.7.11. Feladat. Osszuk el maradékosan az a egész számot b -vel, határozzuk meg a hányadost és a maradékot (a maradék nemnegatív szám legyen).

(a) $a = 13$, $b = 5$,(b) $a = 38$, $b = 5$,(c) $a = 0$, $b = 3$,(d) $a = 2$, $b = -5$,(e) $a = -30$, $b = 4$,(f) $a = 39$, $b = -8$,(g) $a = -47$, $b = -4$,(h) $a = 44$, $b = -7$.($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.11)

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal a 126 és -48 legnagyobb közös osztóját, és adjuk meg legkisebb közös többszörösüket.

Megoldás. Mivel a legnagyobb közös osztó csak asszociáltság erejéig egyértelmű egész számok körében (azaz, ha d legnagyobb közös osztó, akkor $-d$ is), így vehetjük a számok abszolútértékét. Az euklideszi algoritmus a 126 és 48 számokra a következő maradékos osztások sorozata:

$$\begin{array}{rcll}
 126 & = & 2 \cdot 48 + 30 & (0 < 30 < 48) \\
 48 & = & 1 \cdot 30 + 18 & (0 < 18 < 30) \\
 30 & = & 1 \cdot 18 + 12 & (0 < 12 < 18) \\
 18 & = & 1 \cdot 12 + 6 & (0 < 6 < 12) \\
 12 & = & 2 \cdot 6 + 0.
 \end{array}$$

A második lépésben az osztandó megegyezik az első lépésben szereplő osztóval. Továbbá, a második lépésben az osztó az első lépésben a maradék. Ez a további lépésekben is hasonlóan alakul, ahogy a színek is mutatják.

A legnagyobb közös osztó az utolsó nemnulla maradék, azaz esetünkben 6. Mivel egész számok körében keressük a legnagyobb közös osztót, így a -6 is legnagyobb közös osztó: $\text{lko}(126, -48) \sim 6$.

A legkisebb többszörös az $\text{lko}(a, b) \cdot \text{lkt}(a, b) \sim a \cdot b$ összefüggésből számítható:

$$\text{lko}(126, -48) \cdot \text{lkt}(126, -48) \sim 126 \cdot (-48).$$

Így kapjuk, hogy:

$$\text{lkt}(126, -48) \sim \frac{126 \cdot (-48)}{6} \sim 21 \cdot 48 \sim 1008.$$

1.7.12. Feladat. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal az alábbi a , b egész számok legnagyobb közös osztóját, és adjuk meg legkisebb közös többszörösüket.

(a) $a = 56$, $b = 40$,(b) $a = 35$, $b = 80$,

(c) $a = 36, b = -21,$

(d) $a = 78, b = 30,$

(e) $a = 368, b = 161,$

(f) $a = -539, b = -1001,$

(g) $a = 1253, b = -3241,$

(h) $a = -1183, b = 1573.$

(↗ eredmény: 2.7.12)

1.7.13. Feladat. Mutassuk meg, hogy 3 osztója a $2025^{2008} + 1848^{2010} - 1476^{2012}$ kifejezésnek.

(↗ eredmény: 2.7.13)

1.7.14. Feladat. Flóra az édesapja 28. születésnapján született. Legfeljebb hányszor lehet Flóra életkora osztója az édesapja életkorának?

(↗ eredmény: 2.7.14)

Kidolgozott feladat. Mutassuk meg, hogy ha a és b egész számok és $3a + b$ osztható 8-cal, akkor $9a - 13b$ is osztható 8-cal.**Megoldás.** Ahhoz, hogy igazoljuk, hogy $8 \mid 9a - 13b$, felhasználjuk, hogy $8 \mid 3a + b$. Kifejezzük a $9a - 13b$ -t a $3a + b$ segítségével úgy, hogy először vizsgáljuk a együtthatóit. Ahhoz, hogy $9a$ -t kapjunk 3-mal szorozzuk: $3 \cdot (3a + b) = 9a + 3b$. Ezután „pótoljuk ki” a $9a + 3b$ -t, hogy $9a - 13b$ -t kapjunk: $(9a + 3b) - 16b = 9a - 13b$. Végül pedig vizsgáljuk a kapott kifejezést: $9a - 13b = 3 \cdot (3a + b) - 16b$. Tudjuk, hogy $8 \mid 3a + b$, tehát $8 \mid 3 \cdot (3a + b)$ is teljesül, illetve $8 \mid 16$, tehát $8 \mid 16b$. Így ezek különbsége is osztható lesz 8-cal, azaz $8 \mid 9a - 13b$.**1.7.15. Feladat.** Mutassuk meg, hogy ha c és d egész számok és $2c - 3d$ osztható 7-tel, akkor $18c - 6d$ is osztható 7-tel.

(↗ eredmény: 2.7.15)

1.7.16. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha x és y egész számok és $x + y$ és $6x - 5y$ is osztható 11-gyel, akkor $8x - 3y$ is osztható 11-gyel.

(↗ eredmény: 2.7.16)

1.7.17. Feladat. Ma péntek van, a hét melyik napja lesz 80 nap múlva?

(↗ eredmény: 2.7.17)

1.7.18. Feladat. A szomszéd néni 103. születésnapjára a családja meglepetés partit szervez, aminek a végén pontosan 103 db tűzijátékot lőnek fel. A tűzijátékok színei a következő sorrendben változnak: kék, sárga, fehér, zöld, piros, zöld, majd ebben a sorrendben ismétlődnek. Milyen színű a 60., a 80., és az utolsó fellőtt tűzijáték?

(↗ eredmény: 2.7.18)

1.7.19. Feladat. Hány alma van a kosárban, ha az almákat négyesével rakjuk ki, akkor 3 alma marad meg, ha ötösével rakjuk sorokba, akkor 4 alma, és ha hatosával, akkor pedig 5 alma marad ki és tudjuk, hogy 100-nál kevesebb az almák száma?

(↗ eredmény: 2.7.19)

1.7.20. Feladat. Egy kis faluba a mobil zöldséges 8 naponta jár, a mobil hentes pedig 6 naponta. Egy keddi napon mindkettő a faluban volt. Hány nap múlva, és a hét melyik napján lesz legközelebb zöldséges és hentes is a faluban?

(↗ eredmény: 2.7.20)

Kidolgozott feladat. Egy raktárba most érkezett egy üdítőszállítmány. Az üdítőket kétféle dobozokba csomagolva szállítják: az egyikben 120 db üveg van, a másikban 84. A raktár dolgozóinak az a feladata, hogy újracsomagolják az üvegeket úgy, hogy minden csomagban azonos számú üdítő legyen, és egy se maradjon ki. Hány darabot tudnak egy csomagba belerakni, ha azt akarják, hogy a lehető legtöbb férjen egy csomagba?

Megoldás. Olyan számú üveget kell egy csomagba rakniuk, ami osztója 84-nek és 120-nak is, hiszen ezzel tudják biztosítani, hogy egy üveg se maradjon ki. Mivel az a cél, hogy a lehető legtöbb üveg férjen a csomagba, így a közös osztók közül a legnagyobbat keressük. Ez a szám nem lesz más, mint a 84 és a 120 legnagyobb közös osztója. Ahhoz, hogy ezt meghatározzuk, szükségünk lesz a két szám prímszorzatfelbontására: $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ és $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. A két szám legnagyobb közös osztóját úgy tudjuk meghatározni, hogy vesszük azokat a prímeket, amik mindkét szám felbontásában szerepelnek az előforduló legkisebb kitevővel. Azaz $\text{lko}(84, 120) = 2^2 \cdot 3 = 12$, tehát 12 üveget kell egy csomagba rakni a raktár dolgozóinak.

1.7.21. Feladat. Egy 480 cm széles és 330 cm hosszú szobát akarunk kitapétázni. A tapétát azonos szélességű függőleges csíkokban szeretnénk feltenni minden falra. Maximum milyen széles csíkokat vágjunk, hogy minden falra pontosan egész számú tapétacsík férjen ki?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.21)

1.7.22. Feladat. Marci anyukája kettő kocka alakú dobozba szeretné bepakolni a kisfiú építőkockáit. Az egyik doboz élhosszúsága 27 cm, a másik dobozé 72 cm. Mekkora lehetnek maximum az építőkockák élei, ha tudjuk, hogy minden kocka ugyanakkora méretű és mindkét dobozt meg tudja pakolni úgy, hogy pontosan (hézag nélkül) beleférnek az építőkockák?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.22)

1.7.23. Feladat. Hány olyan 100-nál kisebb n természetes szám van, amelyre $\text{lko}(n, 36) = 6$ teljesül?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.23)

Kidolgozott feladat. Réges-régen egy messzi-messzi galaxisban volt egy csillag, ami körül egy kicsi és egy nagy bolygó keringett. A kis bolygó 120 földi nap alatt kerülte meg a csillagát, míg a nagy bolygó keringési ideje 320 földi nap volt. A két bolygó és a csillag pontosan egy egyenesre estek, amikor a lázadók megnyerték a háborút. Mikor volt legközelebb olyan eset, amikor a három égitest ugyanebben a helyzetben volt?

Megoldás. A kicsi bolygó 120 naponta van ugyanebben a helyzetben, a nagy bolygó pedig 320 naponta. Tehát egy olyan számot kell keresni, ami többszöröse 120-nak és 320-nak is, méghozzá ezek közül a legkisebbet, hiszen a legközelebbi ilyen esetet keressük. Ez a szám nem lesz más, mint a 120 és a 320 legkisebb közös többszöröse. Ahhoz, hogy ezt megadjuk, szükségünk lesz a két szám prímszorzatfelbontására: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ és $320 = 2^6 \cdot 5$. Két szám legkisebb közös többszörösét úgy tudjuk kiszámolni, hogy vesszük az összes előforduló prímet a felbontásokból az előforduló legnagyobb kitevővel. Azaz $\text{lkt}(120, 320) = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 = 960$, tehát a három égitest 960 földi nap múlva került újra ebbe a helyzetbe.

1.7.24. Feladat. Bálint és Bandi a futópálya azonos pontjából egyszerre, egy irányba, tempójukon nem változtatva futni kezdenek. Bálint egy kört 84 másodperc alatt, Bandi pedig 72 másodperc

alatt tesz meg. Mennyi idő múlva lesznek legközelebb egyszerre a kiindulási pontban? Hány kört futottak addig egyenként?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.24)

1.7.25. Feladat. Kirándulni indultunk autóval. Egy út mentén, ahol éppen haladunk, az egyik oldalon 24 méterenként fák, másik oldalon 42 méterenként villanyoszlopok állnak. Most elhaladunk egy olyan helyen, ahol pontosan a villanyoszloppal szemben egy fa van. Hány méterrel odébb fordulhat újra elő?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.25)

1.7.26. Feladat. Egy villamos egyik végállomásáról két különböző irányba indítanak villamosokat. Az I. villamost 12 percenként indítják, a II. villamost 15 percenként. Reggel 6 órakor egyszerre indul a két különböző irányba villamos. Mikor indítják a villamosokat legközelebb egyszerre? Reggel 7 óra után és délután 4 óra előtt hányszor indítják egyszerre a két villamost?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.26)

1.7.27. Feladat. Három barátnő közül Dóra 2 naponta rendszeresen biciklizik, Ella 3 naponként lovagol, Bori pedig 5 naponta kézilabdázik. Hányszor fordulhat elő egy 30 napos hónapban, hogy mindhárman ugyanazon a napon végzik a sporttevékenységüket? Hányszor lehet olyan nap a hónapban, amikor pontosan ketten sportolnak közülük?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.27)

1.7.28. Feladat. Az Óperenciás Tengeren is túl él egy 100 fejű sárkány. A királylány kezéért küzdő szegény legény elindul, hogy legyőzze a bestiát. Segítségül kap egy varázslatos fegyvert: egy kardot, mellyel egy csapásra pontosan 8, 9 vagy 10 fejét tudja levágni a sárkánynak. Sajnos 8 fej levágása esetén a sárkánynak 14 új feje nő ki, ha 9 fejet vág le, akkor 6, ha 10 fejet, akkor pedig 13 nő ki. Ha a sárkány összes feje lehullott, nem nő ki több. Hogyan tudja legyőzni a hősünk a sárkányt?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.28)

1.7.29. Feladat. Melyik az a két természetes szám, amelyek legnagyobb közös osztója 6, a legnagyobb közös osztó keresésekor az euklideszi algoritmusban 3 maradékos osztást végeztünk (azaz a harmadik maradékos osztásnál lett 0 a maradék). Továbbá tudjuk, hogy a hányadosok egymás utáni természetes számok voltak (növekvő sorrendben), és a hányadosok összege 9.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.29)

1.8. Komplex számok & Polinomok

Kidolgozott feladat. Kanonikus alakban számolva adjuk meg a

$$\frac{(2+i)((1-3i)+(-2+4i))}{-3+i+|3-4i|}$$

komplex szám kanonikus alakját.

Megoldás. Külön-külön kiszámítjuk a nevezőt és a számlálót is kanonikus alakban, majd a számlálót és a nevezőt is megszorozzuk a nevező konjugáltjával, és így megkapjuk a tört kanonikus alakját.

$$\begin{aligned} \frac{(2+i)((1-3i)+(-2+4i))}{-3+i+|3-4i|} &= \frac{(2+i)(-1+i)}{-3-i+\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{2 \cdot (-1) + 2 \cdot i + i \cdot (-1) + i \cdot i}{2-i} \\ &= \frac{-3+i}{2-i} = \frac{(-3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-7-i}{5} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i. \end{aligned}$$

1.8.1. Feladat. Kanonikus alakban számolva végezzük el a következő műveleteket, adjuk meg a végeredmény kanonikus alakját:

- | | | |
|------------------------------|---|--|
| (a) i^{2027} , | (b) i^{-22} , | (c) $(3+5i)(2-7i)$, |
| (d) $(-6+9i+4-8i) \cdot i$, | (e) $ -3+4i \cdot (-3-i)$, | (f) $\frac{-7-i}{1+4i}$, |
| (g) $\frac{1+3i}{3+2i}$, | (h) $\frac{(-2+3i)(8+i)}{(-4-7i)(1-i)}$, | (i) $\frac{\operatorname{Re}(3+5i)-(4-2i)}{(3-2i)+\operatorname{Im}(6+i)}$. |
- ($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.8.1)

1.8.2. Feladat. Váltuk át a következő φ szögeket fokból radiánba, ábrázoljuk az egységkörön, és határozzuk meg $\cos \varphi$ és $\sin \varphi$ értékét számológép használata nélkül.

- | | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| (a) 0, | (b) 30, | (c) 45, | (d) 60, |
| (e) 90, | (f) 120, | (g) 135, | (h) 150, |
| (i) 180, | (j) 210, | (k) 225, | (l) 240, |
| (m) 270. | (n) 300, | (o) 315, | (p) 330. |
- ($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.8.2)

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg a $3 + \sqrt{3}i$ komplex szám trigonometrikus és exponenciális alakját.

Megoldás. A szám abszolútértékének kiemelésével kezdjük, amely

$$\sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}.$$

Tehát a kiemelés:

$$3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3} \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}i \right) = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right).$$

Olyan α szöget keresünk, amelyre $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ és $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. Ez a szög $\alpha = \frac{\pi}{6}$, tehát a keresett trigonometrikus- és exponenciális alakok rendre

$$2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{és} \quad 2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}.$$

1.8.3. Feladat. Ábrázoljuk az alábbi kanonikus alakban megadott komplex számokat a Gauss-féle számsíkon, és írjuk át trigonometrikus és exponenciális alakba ezeket:

- | | | |
|-----------------------|------------------------------|------------------------|
| (a) 3, | (b) -5 , | (c) i , |
| (d) $-4i$, | (e) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, | (f) $1 - i$, |
| (g) $1 - \sqrt{3}i$, | (h) $-\sqrt{3} - i$, | (i) $-3 + \sqrt{3}i$. |

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.8.3)

1.8.4. Feladat. Ábrázoljuk az alábbi trigonometrikus vagy exponenciális alakban megadott komplex számokat a Gauss-féle számsíkon, és írjuk át kanonikus alakba ezeket:

- | | | |
|---|---|-----------------------------|
| (a) $2(\cos 0 + i \sin 0)$, | (b) $3e^{\frac{3\pi}{2}i}$, | (c) $2e^{\frac{\pi}{4}i}$, |
| (d) $\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$, | (e) $\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$, | (f) $e^{\frac{5\pi}{6}i}$, |
| (g) $2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$. | | |

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.8.4)

Kidolgozott feladat. Trigonometrikus (vagy exponenciális) alakkal számolva határozzuk meg az $(1 - i)^{2022}$ komplex számot kanonikus alakban.

Megoldás. Az $1 - i$ komplex szám abszolútértéke $\sqrt{2}$, tehát

$$\begin{aligned} (1 - i)^{2022} &= \left(\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \right)^{2022} = \left(\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \right)^{2022} = \\ &= \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \right)^{2022} = (\sqrt{2})^{2022} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)^{2022} = \\ &= 2^{1011} \left(\cos \frac{2022 \cdot 7\pi}{4} + i \sin \frac{2022 \cdot 7\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Ez már trigonometrikus alak, de a szöge nincsen 0 és 2π között, ezért a kanonikus alakra váltáshoz fel kell használnunk a $\cos$ és $\sin$ függvények 2π -periodicitását. Mivel $\frac{2022 \cdot 7}{4} = 3538,5 = 3538 + \frac{1}{2}$ (és 3538 páros), ezért a fenti számolást befejezhetjük:

$$2^{1011} \left(\cos \frac{2022 \cdot 7\pi}{4} + i \sin \frac{2022 \cdot 7\pi}{4} \right) = 2^{1011} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2^{1011} (0 + 1i) = 2^{1011}i.$$

1.8.5. Feladat. Trigonometrikus vagy exponenciális alakkal számolva határozzuk meg az alábbi műveletek eredményét, majd adjuk meg az eredmény kanonikus alakját is:

- (a) $(\sqrt{3} - i)(2 - 2\sqrt{3}i)$, (b) $(-2 - 2i)(-5 + 5i)$, (c) i^{14} ,
 (d) $(\sqrt{3} - i)^{67}$, (e) $(1 + i)^{1222}$, (f) $(-3 - 3\sqrt{3}i)^{1526}$.
 ($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.8.5)

1.8.6. Feladat. Adjuk meg trigonometrikus és kanonikus alakban a következő gyökvonások eredményét.

- (a) $\sqrt{9}$, (b) $\sqrt{-4}$, (c) $\sqrt{i}$,
 (d) $\sqrt{-16i}$, (e) $\sqrt{-15 + 8i}$, (f) $\sqrt{2 + 2\sqrt{3}i}$,
 (g) $\sqrt[3]{-8}$, (h) $\sqrt[3]{-8i}$, (i) $\sqrt[3]{-8 + 8i}$.
 ($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.8.6)

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg az $x^4 + x^2 - 6$ polinom gyökeit, gyöktényezős felbontását.

Megoldás. Vegyük észre, hogy a vizsgálandó polinom olyan, hogy $y = x^2$ helyettesítéssel az $y^2 + y - 6$ polinomot kapjuk, mely másodfokú, így könnyen tudjuk kezelni. Határozzuk meg ennek a gyökeit:

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = 2 \quad \text{és} \quad -3.$$

tehát $y^2 + y - 6 = (y - 2)(y - (-3))$, melybe az $y = x^2$ összefüggést visszahelyettesítve $x^4 + x^2 - 6 = (x^2 - 2)(x^2 + 3)$ adódik. A kapott tényezők másodfokúak, az első gyökei $\pm\sqrt{2}$, a második polinom gyökei, azaz az $x^2 + 3 = 0$ egyenlet megoldásai a $\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$.

Azaz a gyökök $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}i$, és $-\sqrt{3}i$. A gyöktényezős felbontás pedig

$$(x - \sqrt{2})(x - (-\sqrt{2}))(x - \sqrt{3}i)(x - (-\sqrt{3}i)) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3}i)(x + \sqrt{3}i).$$

1.8.7. Feladat. Határozzuk meg a következő polinomok gyökeit. Adjuk meg a gyöktényezős felbontásukat is.

- (a) $x^2 + 1$, (b) $x^2 + 6x + 10$, (c) $x^2 + 2ix - 1$,
 (d) $x^3 + 8$, (e) $x^4 + 9x^2$, (f) $x^4 - 16$,
 (g) $x^4 + 18x^2 + 81$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.8.7)

2. fejezet

Megoldások

2.1. Matematikai logika: Az ítéletkalkulus elemei

2.1.1. Feladat. (a) $B \vee C$, (b) $B \wedge (\neg C)$, (c) $\neg A$, (d) $B \rightarrow C$, (e) $B \leftrightarrow A$.

↗ **videó:** 1.1. Feladat: (a)–(b) és (e)

(↗ vissza a feladathoz: [1.1.1](#))

2.1.2. Feladat. Az F formulának nyolc darab részformulája van: A , B , C , $\neg B$, $\neg C$, $(\neg C) \rightarrow B$, $A \vee (\neg B)$ és F .

↗ **videó:** 1.2. feladat

(↗ vissza a feladathoz: [1.1.2](#))

2.1.3. Feladat. (c) $A \leftrightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C))$

(↗ vissza a feladathoz: [1.1.3](#))

2.1.4. Feladat. Az ítéletek formalizáltjai az alábbiak.

- (a) $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$
- (b) $A \rightarrow (\neg B \vee (B \wedge C))$
- (c) $(A \wedge (\neg B)) \rightarrow (C \leftrightarrow D)$
- (d) $A \leftrightarrow (\neg B \vee (B \wedge C))$
- (e) $A \leftrightarrow (B \wedge (\neg C) \wedge (\neg D))$
- (f) $(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)$
- (g) $A \rightarrow (B \leftrightarrow \neg C)$
- (h) $(\neg A \wedge B) \rightarrow (C \leftrightarrow A)$
- (i) $A \vee (B \wedge C)$
- (j) $A \wedge (B \rightarrow \neg C)$
- (k) $A \rightarrow (B \vee C)$

↗ **videók:** 1.4. Feladat: (a), 1.4. Feladat: (b),(g)

(↗ vissza a feladathoz: [1.1.4](#))

2.1.5. Feladat. Az ítéletek formalizáltjai és igazságértékei az alábbiak.

- (a) $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow (C \leftrightarrow D) = h$
- (b) $(A \wedge B) \rightarrow (C \leftrightarrow (\neg D \vee E)) = i$
- (c) $(A \wedge B) \rightarrow (C \rightarrow (D \vee E)) = h$

↗ **videó:** 1.5. Feladat: (a)

(↗ vissza a feladathoz: [1.1.5](#))

2.1.6. Feladat. Az (a) rész igazolása:

$(A \wedge B) \rightarrow C$				$\equiv$	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$			
<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	i	<i>i</i>	<i>i</i>	i	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	h	<i>h</i>	<i>i</i>	h	<i>i</i>	<i>h</i>
<i>i</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	i	<i>i</i>	<i>i</i>	i	<i>h</i>	<i>i</i>
<i>i</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	i	<i>h</i>	<i>i</i>	i	<i>h</i>	<i>h</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	i	<i>i</i>	<i>h</i>	i	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	i	<i>h</i>	<i>h</i>	i	<i>i</i>	<i>h</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	i	<i>i</i>	<i>h</i>	i	<i>h</i>	<i>i</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	i	<i>h</i>	<i>h</i>	i	<i>h</i>	<i>h</i>

A feladat többi részét is hasonlóan lehet ellenőrizni: fel kell írni az ekvivalenciajel két oldalán lévő formulák igazságtáblázatát, és ellenőrizni kell, hogy minden kiértékelésnél ugyanazt a logikai értéket kapjuk-e.

↗ **videók:** [1.6. Feladat: \(a\)](#), [1.6. feladat: \(b\)](#)

(↗ vissza a feladathoz: [1.1.6](#))

2.1.7. Feladat. (a) (1): $(\neg A \vee B) \rightarrow C$

(2): $(\neg A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$

(1) $\equiv$ (2)

(b) (1): $A \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C)$

(2): $(B \vee C \vee A) \wedge ((\neg B \vee \neg C) \rightarrow \neg A)$

(1) $\not\equiv$ (2)

(c) (1): $\neg A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$

(2): $(A \vee \neg C \vee B) \wedge ((\neg A \wedge \neg C) \rightarrow \neg B)$

(1) $\equiv$ (2)

(↗ vissza a feladathoz: [1.1.7](#))

2.1.8. Feladat. Több jó megoldás is létezik, néhányat megadunk.

(a) $(\neg A) \vee B \vee (\neg C)$;

(b) $A \wedge (\neg B)$;

(c) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;

(d) $((\neg A) \wedge (\neg B)) \vee C \equiv ((\neg A) \vee C) \wedge ((\neg B) \vee C)$;

(e) $((\neg A) \wedge B) \vee C \wedge (A \vee (\neg B) \vee (\neg C)) \equiv ((\neg A) \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee (\neg B) \vee (\neg C))$;

(f) $(A \vee (\neg B) \vee C) \wedge (((\neg A) \wedge (\neg C)) \vee ((\neg A) \wedge B)) \equiv (A \vee (\neg B) \vee C) \wedge (\neg A) \wedge ((\neg C) \vee B)$.

↗ **videók:** [1.8. Feladat: \(d\)](#), [1.8. Feladat: \(e\)](#)

(↗ vissza a feladathoz: [1.1.8](#))

2.1.9. Feladat. A klózokat aláhúzással jelöljük.

$F_1 = (\underline{A \vee B \vee (\neg C)}) \wedge (\underline{A \vee (\neg B)})$, a formula konjunktív normálforma, de nem teljes konjunktív normálforma.

$F_2 = (\underline{A} \wedge (\underline{\neg B}) \wedge (\underline{\neg C})) \vee (\underline{A} \wedge \underline{B})$, a formula nem konjunktív normálforma, így természetesen nem is teljes konjunktív normálforma.

$F_3 = (A \vee (\neg B) \vee C) \wedge ((\neg A) \vee B \vee C)$, a formula teljes konjunktív normálforma, így konjunktív normálforma is.

$F_4 = (\neg A) \vee B \vee C$, a formula teljes konjunktív normálforma, így konjunktív normálforma is.

$F_5 = (A \vee (\neg B)) \wedge \underline{B} \wedge \underline{C}$, a formula konjunktív normálforma, de nem teljes konjunktív normálforma.

$F_6 = \underline{A} \wedge \underline{B} \wedge (\neg C)$, a formula konjunktív normálforma, de nem teljes konjunktív normálforma.

↪ videó: [1.9. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.1.9](#))

2.1.10. Feladat. (a) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (\neg A) \vee (\neg B) \vee C$;

(b) $(A \vee (\neg B)) \rightarrow (C \leftrightarrow B) \equiv ((\neg A) \vee (\neg B) \vee C) \wedge ((\neg A) \vee B \vee (\neg C)) \wedge (A \vee B \vee (\neg C))$;

(c) $A \vee ((B \rightarrow C) \wedge (\neg(B \wedge C))) \equiv (A \vee (\neg B) \vee C) \wedge (A \vee (\neg B) \vee (\neg C))$;

(d) $(\neg(A \wedge B)) \wedge ((A \wedge (\neg C)) \rightarrow B) \equiv ((\neg A) \vee (\neg B) \vee (\neg C)) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B) \vee C) \wedge ((\neg A) \vee B \vee C)$;

(e) $(A \vee (\neg B)) \rightarrow ((\neg(B \wedge C)) \leftrightarrow A) \equiv ((\neg A) \vee (\neg B) \vee (\neg C)) \wedge (A \vee B \vee (\neg C)) \wedge (A \vee B \vee C)$;

(f) $((\neg A) \wedge B) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \wedge (\neg C))) \equiv ((\neg A) \vee (\neg B) \vee C) \wedge (A \vee B \vee (\neg C)) \wedge (A \vee B \vee C)$.

↪ videó: [1.10. Feladat: \(c\)](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.1.10](#))

2.2. Matematikai logika: A predikátumkalkulus elemei

2.2.1. Feladat. A „fordítás” eredményei az alábbiak.

- (a) A 7 páros szám.
- (b) A 4 négyzetszám, és 12 nemnegatív.
- (c) Minden szám 4-szerese osztható 2-vel.
- (d) A 6-nak létezik páros osztója.
- (e) Minden 4-gyel osztható szám páros.
- (f) Két egész szám összege pontosan akkor páros, ha a szorzatuk is az.
- (g) Minden négyzetszámnak van páros többszöröse.
- (h) Két egész szám szorzata akkor és csak akkor páratlan, ha legalább az egyik páratlan.
- (i) Létezik olyan páros szám, melynek nincs páros negatív osztója.

↗ videó: **2.1. feladat: (a)–(b) és (d)–(g)**

(↗ vissza a feladathoz: 1.2.1)

2.2.2. Feladat. A zárt formulák igazságértéke:

- | | | | |
|------------|------------|------------|------------|
| (a) igaz, | (b) hamis, | (c) hamis, | (d) hamis, |
| (e) igaz, | (f) hamis, | (g) igaz, | (h) igaz, |
| (i) hamis, | (j) igaz, | (k) igaz, | (l) hamis. |

↗ videó: **2.2. feladat: (a), (e)–(f) és (i)**

(↗ vissza a feladathoz: 1.2.2)

2.2.3. Feladat. Pirossal jelölve a **kötött előfordulást**, zölddel a **szabad előfordulást**:

- (a) $(\forall x)(K(\textcolor{red}{x}, \textcolor{green}{y}) \vee L(\textcolor{red}{x}))$,
- (b) $(\exists y)(I(s(\textcolor{red}{x}, \textcolor{red}{y})) \leftrightarrow (\forall x)(O(\textcolor{red}{x}, \textcolor{red}{y})))$,
- (c) $M(k(\textcolor{green}{x}, \textcolor{green}{b}), \textcolor{green}{x}) \wedge (\exists z)(M(\textcolor{green}{y}, k(\textcolor{red}{z}, \textcolor{red}{a})))$,
- (d) $(\forall x) P(f(\textcolor{red}{x}, \textcolor{red}{a}), \textcolor{red}{x}) \rightarrow (\exists y)(P(f(\textcolor{green}{y}, \textcolor{green}{x}), \textcolor{red}{y}) \wedge Q(\textcolor{green}{x}))$

↗ videó: **2.3. feladat: (a)–(c)**

(↗ vissza a feladathoz: 1.2.3)

2.2.4. Feladat. Az ítéletek formalizáltjai az alábbiak.

- (a) $(\exists x)(H(x) \wedge \neg V(x))$
- (b) $(\forall x)(H(x) \rightarrow V(x))$
- (c) $(\exists x)(H(x) \wedge \neg(\exists y)B(y, x))$
- (d) $(\exists x)(H(x) \wedge (\forall y)(T(y, x) \rightarrow C(y, x)))$
- (e) $(\exists x)(F(x) \wedge \neg(\exists y)(\neg F(y) \wedge T(y, x)))$
- (f) $(\forall x)(A(x) \rightarrow \neg F(x)) \wedge (\exists x)(\neg F(x) \wedge \neg A(x))$
- (g) $(\forall x)(B(x, p) \rightarrow H(x))$
- (h) $(\exists x)(H(x) \wedge (\neg S(a(x))))$
- (i) $S(a(p))$

↪ **videók:** [2.4. feladat: \(a\)–\(c\)](#), [2.4. feladat: \(f\) és \(i\)](#)

(↪ vissza a feladathoz: 1.2.4)

2.2.5. Feladat. Predikátumok: $O(x, y)$: „ x osztja y -t”, $N(x)$: „ x nullára végződik”, $P(x)$: „ x pozitív”, $K(x, y)$: „ x kisebb y -nál”.

Függvények: $f(x)$: „ x négyzete”.

- (a) $(\forall x)(O(1, x) \wedge O(x, x))$
 $\neg[(\forall x)(O(1, x) \wedge O(x, x))] \equiv (\exists x)(\neg O(1, x) \vee \neg O(x, x))$
- (b) $(\forall x)(\exists y)K(y, x)$
 $\neg[(\forall x)(\exists y)K(y, x)] \equiv (\exists x)(\forall y)\neg K(y, x)$
- (c) $(\forall x)(O(10, x) \rightarrow N(x))$
 $\neg[(\forall x)(O(10, x) \rightarrow N(x))] \equiv (\exists x)(O(10, x) \wedge \neg N(x))$
- (d) $(\exists x)(K(x, 0) \wedge P(f(x)))$
 $\neg[(\exists x)(K(x, 0) \wedge P(f(x)))] \equiv (\forall x)(\neg K(x, 0) \vee \neg P(f(x)))$
- (e) $(\forall x)(P(x) \vee K(x, 0))$
 $\neg[(\forall x)(P(x) \vee K(x, 0))] \equiv (\exists x)(\neg P(x) \wedge \neg K(x, 0))$

↪ **videó:** [2.5. feladat: \(a\) és \(c\)](#)

(↪ vissza a feladathoz: 1.2.5)

2.2.6. Feladat. Individuumkonstansok: m : „Mézga Géza”.

Predikátumok: $I(x)$: „ x informatikus”, $E(x)$: „ x éhes”, $S(x)$: „ x szakács”, $K(x, y)$: „ x kedveli y -t”, $F(x, y)$: „ x főz y -nak”, $Sz(x)$: „ x szerencsés”, $G(x, y)$: „ x gyermeke y -nak”.

Függvények: $g(x)$: „ x gyereke”.

- (a) $(\forall x)(I(x) \rightarrow E(x))$
 Tagadása: $(\exists x)(I(x) \wedge \neg E(x))$, *Van olyan informatikus, aki nem éhes.*
- (b) $(\forall x)((E(x) \wedge S(x)) \rightarrow F(x, x))$,
 Tagadása: $(\exists x)(E(x) \wedge S(x) \wedge \neg F(x, x))$, *Van olyan éhes szakács, aki nem főz magának.*
- (c) $(\forall x)((E(x) \wedge I(x)) \rightarrow (\forall y)(S(y) \rightarrow K(x, y)))$,
 Tagadása: $(\exists x)(E(x) \wedge I(x) \wedge (\exists y)(S(y) \wedge \neg K(x, y)))$, *Van olyan éhes informatikus, aki nem kedvel minden szakácsot.*
- (d) $(\exists x)(S(x) \wedge (\forall y)(F(x, y) \rightarrow I(y)))$,
 Tagadása: $(\forall x)(S(x) \rightarrow (\exists y)(F(x, y) \wedge \neg I(y)))$, *A szakácsok nem csak informatikusoknak főznek.*
- (e) $(\forall x)(\forall y)((I(x) \wedge F(y, x) \wedge S(y)) \rightarrow K(x, y))$,
 Tagadása: $(\exists x)(\exists y)(I(x) \wedge F(y, x) \wedge S(y) \wedge \neg K(x, y))$, *Van olyan informatikus, aki nem kedvel néhány neki főző szakácsot.*
- (f) $\neg Sz(m) \wedge (\forall x)(G(x, m) \rightarrow Sz(x))$,
 Tagadása: $Sz(m) \vee (\exists x)(G(x, m) \wedge \neg Sz(x))$, *Mézga Géza szerencsés, vagy van olyan gyermeke, aki szerencsétlen.*
- (g) $(S(m) \wedge (\forall x)\neg E(x)) \rightarrow (\forall x) Sz(x)$,
 Tagadása: $S(m) \wedge (\forall x)\neg E(x) \wedge (\exists x)\neg Sz(x)$, *Mézga Géza a szakács, senki sem éhes, és van aki nem szerencsés.*

↪ **kidolgozott feladat (pdf):** [2.6. feladat: \(a\) és \(e\)–\(f\)](#)

(↪ vissza a feladathoz: 1.2.6)

2.3. Halmazok

2.3.1. Feladat. A halmazok a következők:

- (a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e\} = U$,
- (b) $A \cap B = \{d\}$,
- (c) $\overline{B} = \{a, b, c\}$,
- (d) $A \setminus B = \{a, b, c\}$,
- (e) $A \triangle B = \{a, b, c, e\}$,
- (f) $(A \triangle \overline{C}) \setminus \overline{B} = \emptyset$,
- (g) $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{d\}, \{e\}, \{d, e\}\}$.

↪ **videó:** [3.1. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.3.1](#))

2.3.2. Feladat. Mivel

$$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \quad \text{és} \quad B = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\},$$

ezért

- (a) $A \cup B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$,
- (b) $A \cap B = \{\emptyset, \{b\}\}$,
- (c) $A \setminus B = \{\{a\}, \{a, b\}\}$,
- (d) $B \setminus A = \{\{c\}, \{b, c\}\}$,
- (e) $A \triangle B = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$.

↪ **videó:** [3.2. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.3.2](#))

2.3.3. Feladat.

- | | | | |
|------------|-----------|-----------|-----------|
| (a) Igaz, | (b) igaz, | (c) igaz, | (d) igaz, |
| (e) hamis, | (f) igaz, | (g) igaz, | (h) igaz. |

↪ **videó:** [3.3. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.3.3](#))

2.3.4. Feladat. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

↪ **videó:** [3.4. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.3.4](#))

2.3.5. Feladat.

- | | | | |
|-----------|-----------|----------|----------|
| (a) Igen, | (b) igen, | (c) nem, | (d) nem, |
| (e) nem, | (f) nem. | | |

↪ **videó:** [3.5. Feladat: \(a\), \(c\) és \(e\)](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.3.5](#))

2.3.6. Feladat.

- (a) $\mathcal{C}_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7\}\},$
 (c) $\mathcal{C}_3 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\}\},$

- (b) $\mathcal{C}_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6, 7\}\},$
 (d) nem létezik ilyen osztályozás.

↪ **videó:** [3.6. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.3.6](#))

2.3.7. Feladat.

- (a) $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B,$
 (c) $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C,$
 (e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
 (g) $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = A \cup B.$
- (b) $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A),$
 (d) $A \cap (B \cup C) \neq (A \cup B) \cap (A \cup C),$
 (f) $(A \cap B) \setminus (B \setminus (A \cup C)) = A \cap B,$

↪ **videók:** [3.7. Feladat: \(a\)](#), [3.7. Feladat: \(b\)](#), [3.7. Feladat: \(e\)](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.3.7](#))

2.3.8. Feladat. $\overline{A \cup (B \cap (C \cup D))} = \overline{A} \cap (\overline{B} \cup (\overline{C} \cap \overline{D}))$

↪ **videó:** [3.8. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.3.8](#))

2.3.9. Feladat. $A \subseteq B$ teljesül, $A = B$ és $B \setminus A = \emptyset$ nem teljesül.

↪ **videó:** [3.9. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.3.9](#))

2.3.10. Feladat.

(a)

$$\begin{aligned} x \in (A \cap C) \cup (B \cap D) &\iff x \in (A \cup (B \cap D)) \cap (C \cup (B \cap D)) \\ &\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup D) \cap (C \cup B) \cap (C \cup D) \\ &\implies x \in (A \cup B) \cap (C \cup D) \end{aligned}$$

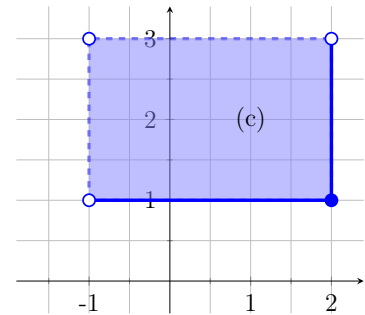
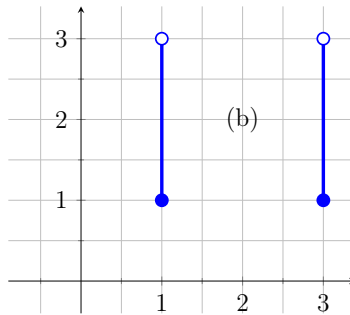
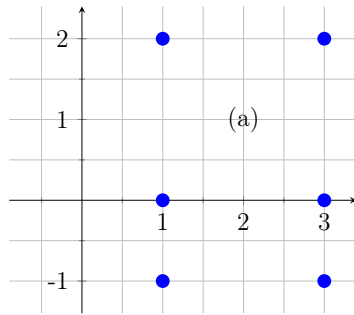
(b)

$$\begin{aligned} x \in C \cup D &\implies x \notin B \cap \overline{(C \cup D)} = B \setminus (C \cup D) \\ &\nearrow \\ x \in A \cap C \cap D & \\ &\searrow \\ &x \in A \cap C \\ \implies x \in &(A \cap C) \setminus (B \setminus (C \cup D)) \end{aligned}$$

↪ **videó:** [3.10. Feladat: \(a\)](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.3.10](#))

2.3.11. Feladat.



⇒ videó: [3.11. Feladat: \(a\)](#)

(⇒ vissza a feladathoz: [1.3.11](#))

2.3.12. Feladat.

(a) Igen,

(b) igen,

(c) nem,

(d) nem.

⇒ videó: [3.12. Feladat: \(a\) és \(c\)](#)

(⇒ vissza a feladathoz: [1.3.12](#))

2.3.13. Feladat.

(a) $\alpha^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha^{-1} = \frac{x+1}{3},$

(b) $\beta^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x\beta^{-1} = x^2,$

(c) $\gamma^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x\gamma^{-1} = \sqrt{x+4} - 2,$

(d) $\delta^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x\delta^{-1} = \frac{\sqrt{x+1}-1}{2}.$

⇒ videó: [3.13. Feladat: \(c\)](#)

(⇒ vissza a feladathoz: [1.3.13](#))

2.3.14. Feladat.

(a) $\alpha: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{3, 5, 7, 9\}, x\alpha = 2x + 1,$

$\alpha^{-1}: \{3, 5, 7, 9\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, x\alpha^{-1} = \frac{x-1}{2},$

(b) $\beta: \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \{2, 3, 4, \dots\}, x\beta = x + 1,$

$\beta^{-1}: \{2, 3, 4, \dots\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}, x\beta^{-1} = x - 1,$

(c) $\gamma: \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \{2, 4, 6, \dots\}, x\gamma = 2x,$

$\gamma^{-1}: \{2, 4, 6, \dots\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}, x\gamma^{-1} = \frac{x}{2},$

(d) $\delta: \mathbb{N} \rightarrow \{\text{négyzetszámok}\}, x\delta = x^2,$

$\delta^{-1}: \{\text{négyzetszámok}\} \rightarrow \mathbb{N}, x\delta^{-1} = \sqrt{x}.$

⇒ videó: [3.14. Feladat: \(b\) és \(c\)](#)

(⇒ vissza a feladathoz: [1.3.14](#))

2.3.15. Feladat.

(a) $\alpha: (0; 1) \rightarrow (-2; 3), x\alpha = 5x - 2$

- (b) $\beta: (1; 6) \rightarrow (4; 7), x\beta = \frac{3}{5}x + \frac{17}{5}$
 (c) $\gamma: (0; 1) \rightarrow \mathbb{R}, x\gamma = \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$
 (d) $\delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x\delta = 2^x$

↪ **videó:** 3.15. Feladat: (b)

(↪ vissza a feladathoz: [1.3.15](#))

2.3.16. Feladat.

- | | | |
|-----------|-----------|----------|
| (a) Igen, | (b) igen, | (c) nem, |
| (d) igen, | (e) nem, | (f) nem, |
| (g) igen, | (h) igen, | (i) nem. |

↪ **videók:** 3.16. Feladat: (a)–(b) és (d), 3.16. Feladat: (f)

(↪ vissza a feladathoz: [1.3.16](#))

2.3.17. Feladat.

- (a) Mindenkit átküld az 1-gyel nagyobb számú szobába, és az új vendéget berakja az 1-es szobába, mert az üres lett.
- (b) Mindenkit át kell küldeni a 999999-cel nagyobb szobába, így az első 999999 számú szobák üresen maradnak. Oda elfér a 999999 új vendég.
- (c) Mindenki menjen át a kétszer akkora számú szobába, mint amiben most van. Ekkor a páratlan számú szobák üresen maradnak, tehát megszámlálhatóan végtelen sok szoba üres marad, oda mehetnek az új vendégek.

(↪ vissza a feladathoz: [1.3.17](#))

2.4. Relációk

2.4.1. Feladat.

- (a) $\alpha \cap \beta = \{(1, 2), (3, 2)\},$
- (b) $\alpha \setminus \beta = \{(3, 4), (4, 4), (5, 5)\},$
- (c) $\alpha^{-1} = \{(2, 1), (2, 3), (4, 3), (4, 4), (5, 5)\},$
- (d) $\beta \cap \alpha^{-1} = \{(4, 3)\}.$

↪ videó: [4.1. Feladat: \(a\),\(c\)](#)

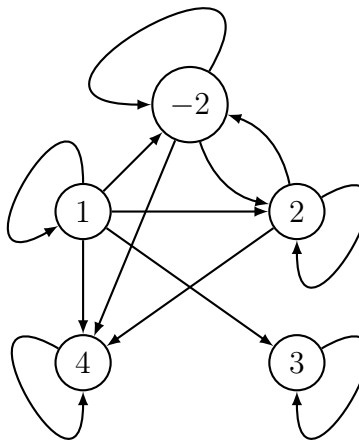
(↪ vissza a feladathoz: [1.4.1](#))

2.4.2. Feladat. Többféleképpen is meg lehet adni a relációkat.

- (a) $\alpha^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{E}^2 : x \text{ az } y \text{ gyermeke}\} = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : y \text{ az } x \text{ gyermeke}\} =$
 $\{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x \text{ az } y \text{ szülője}\},$
- (b) $\beta^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x}{2}\},$
- (c) $\gamma^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm\sqrt{x}\},$
- (d) $\beta \cap \gamma = \{(0, 0), (2, 4)\}.$

(↪ vissza a feladathoz: [1.4.2](#))

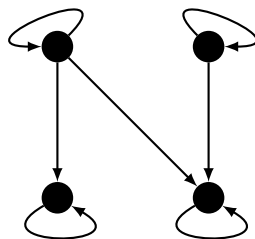
2.4.3. Feladat. A ρ reláció reflexív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív, nem dichotom.



↪ videó: [4.3. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.4.3](#))

2.4.4. Feladat. (a)–(b)



(c) Nincs ilyen gráf, minden dichotom reláció reflexív.

↪ videó: [4.4. Feladat: \(a\)–\(c\)](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.4.4](#))

2.4.5. Feladat.

	Refl.	Szim.	Antiszim.	Tranz.	Dich.	Ekv.	R.r.
(a)	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗
(b)	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✓
(c)	✗	✗	✓	✓	✗	✗	✗
(d)	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗
(e)	✓	✗	✗	✓	✓	✗	✗
(f)	✓	✓	✗	✓	✗	✓	✗
(g)	✓	✓	✗	✓	✗	✓	✗
(h)	✓	✓	✗	✓	✗	✓	✗
(i)	✗	✗	✓	✓	✗	✗	✗
(j)	✓	✓	✗	✓	✗	✓	✗

↪ videók: [4.5. Feladat: \(a\)](#), [4.5. Feladat: \(c\)](#), [4.5. Feladat: \(g\)](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.4.5](#))

2.4.6. Feladat.

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4\}\}$$

$$\varrho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 5), (5, 3), (5, 5), (4, 4)\}$$

↪ videó: [4.6. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.4.6](#))

2.4.7. Feladat.

(a) $\{\{-3, -2, -1\}, \{1, 2, 3\}\}$

(b) $\{\{-3, 0, 3\}, \{-2, 1\}, \{-1, 2\}\}$

(c) $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \{0\}\}, \{\{1, 2\}, \{a, b\}\}, \{\{1, 2, 3\}\}\}$

(d) $\{\{2, 8, 14, 26\}, \{3, 9, 15\}, \{19\}\}$

(e) $\{\{71, 602\}, \{301, 4, 121\}, \{216, 54, 315\}\}$

(f) $\{\{0\}, \{-1, 1\}, \{-2, 2\}, \{-3, 3\}, \dots\} = \{\{a, -a\} : a \in \mathbb{Z}\}$

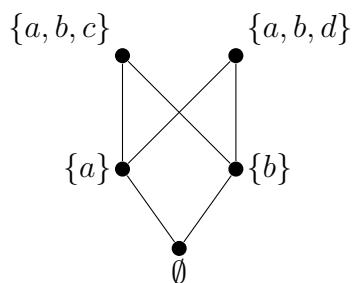
(g) $\{\{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}, \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}\}$

↪ videó: [4.7. Feladat: \(a\), \(c\) és \(d\)](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.4.7](#))

2.4.8. Feladat.

(a)



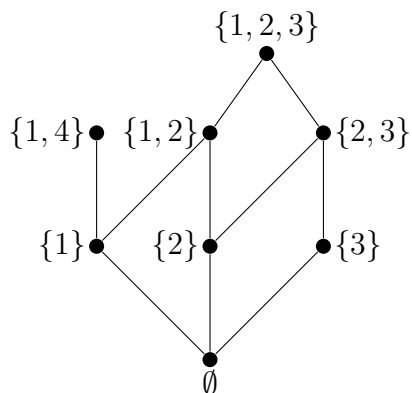
Legnagyobb elem: nincs.

Legkisebb elem: $\emptyset$.

Maximális elemek: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$.

Minimális elem: $\emptyset$.

(b)



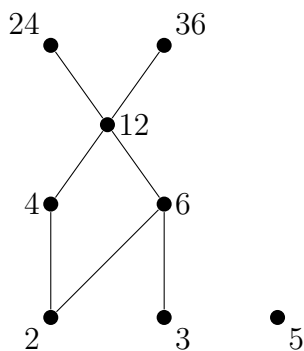
Legnagyobb elem: nincs.

Legkisebb elem: $\emptyset$.

Maximális elemek: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 4\}$.

Minimális elem: $\emptyset$.

(c)



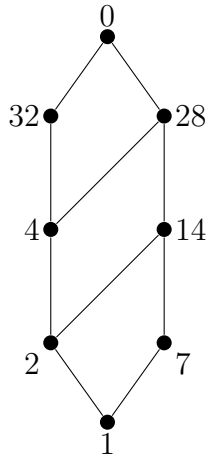
Legnagyobb elem: nincs.

Legkisebb elem: nincs.

Maximális elemek: 24, 36, 5.

Minimális elemek: 2, 3, 5.

(d)



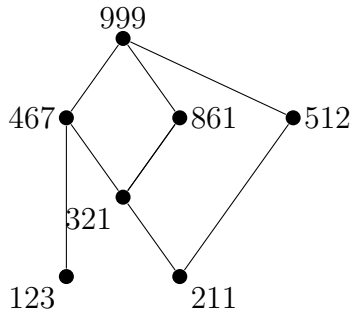
Legnagyobb elem: 0.

Legkisebb elem: 1.

Maximális elem: 0.

Minimális elem: 1.

(e)



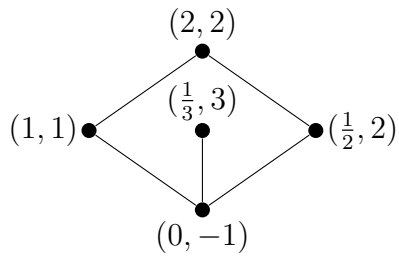
Legnagyobb elem: 999.

Legkisebb elem: nincs.

Maximális elem: 999.

Minimális elemek: 123, 211.

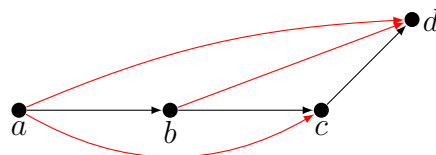
(f)



Legnagyobb elem: nincs.

Legkisebb elem: $(0, -1)$.Maximális elemek: $(2, 2)$, $(\frac{1}{3}, 3)$.Minimális elem: $(0, -1)$. $\rightsquigarrow$ videó: 4.8. Feladat: (a) és (c) $(\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.4.8)**2.4.9. Feladat.**

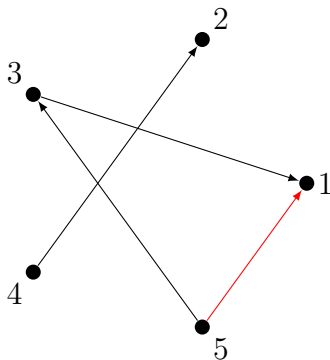
Tranzitív lezárt:



↪ videó: [4.9. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.4.9](#))

2.4.10. Feladat. A ρ reláció tranzitív lezártja: $\rho^+ = \rho \cup \{(5, 1)\}$.



(↪ vissza a feladathoz: [1.4.10](#))

2.4.11. Feladat.

- (a) $\varrho^+ = \{(a, b) \in A^2 : |a - b| \text{ páros}\}$, ahol $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- (b) $\tau^+ = \tau$
- (c) $\alpha^+ = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \exists k \in \mathbb{Z}^+ : b = a^{2^k}\}$
- (d) $\beta^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists k \in \mathbb{Z}^+ : y - x = k\}$

(↪ vissza a feladathoz: [1.4.11](#))

2.5. Kombinatorika, gráfelmélet

2.5.1. Kombinatorika

2.5.1. Feladat. $12!$ ($= 479001600$)

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.5.1](#))

2.5.2. Feladat. $\binom{5}{2}$ ($= 10$)

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.5.2](#))

2.5.3. Feladat. 4^5 ($= 1024$)

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.5.3](#))

2.5.4. Feladat. 20^4 ($= 160000$)

$\rightsquigarrow$ videó: [5.4. Feladat](#)

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.5.4](#))

2.5.5. Feladat. $6 \cdot 5$ ($= 30$)

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.5.5](#))

2.5.6. Feladat. $7 \cdot 6$ ($= 42$)

$\rightsquigarrow$ videó: [5.6. Feladat](#)

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.5.6](#))

2.5.7. Feladat. $\frac{(5+3+4)!}{5!3!4!}$ ($= 27720$)

$\rightsquigarrow$ videó: [5.7. Feladat](#)

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.5.7](#))

2.5.8. Feladat. $\frac{8!}{1!2!5!} = \binom{8}{1} \binom{7}{2} = \binom{8}{5} \binom{3}{2}$ ($= 168$)

$\rightsquigarrow$ videó: [5.8. Feladat](#)

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.5.8](#))

2.5.9. Feladat. $\binom{(6-1)+4}{4}$ ($= 126$)

$\rightsquigarrow$ videó: [5.9. Feladat](#)

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.5.9](#))

2.5.10. Feladat. $\binom{(5-1)+10}{10}$ ($= 1001$)

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.5.10](#))

2.5.11. Feladat. $\binom{(3-1)+30}{30} \quad (= 496)$

(↗ vissza a feladathoz: [1.5.11](#))

2.5.12. Feladat. $\frac{(20+(4-1))!}{(4-1)!} = 20! \binom{20+(4-1)}{20} \quad (= 4308669456480829440000)$

↗ **videó:** [5.12. Feladat](#)

(↗ vissza a feladathoz: [1.5.12](#))

2.5.13. Feladat. $\frac{(15+(3-1))!}{(3-1)!} = 15! \binom{15+(3-1)}{15} \quad (= 177843714048000)$

↗ **videó:** [5.13. Feladat](#)

(↗ vissza a feladathoz: [1.5.13](#))

2.5.14. Feladat. $\frac{(24+(7-1))!}{(7-1)!} = 24! \binom{24+(7-1)}{24} \quad (= 368406749739154248105984000000)$

(↗ vissza a feladathoz: [1.5.14](#))

2.5.15. Feladat. $\binom{5}{3} \binom{85}{2} \quad (= 35700)$

(↗ vissza a feladathoz: [1.5.15](#))

2.5.16. Feladat. $\binom{5}{2} \binom{9}{2} \quad (= 360)$

↗ **videó:** [5.16. Feladat](#)

(↗ vissza a feladathoz: [1.5.16](#))

2.5.17. Feladat. $\binom{4}{2} 3! \quad (= 36)$

↗ **videó:** [5.17. Feladat](#)

(↗ vissza a feladathoz: [1.5.17](#))

2.5.18. Feladat. $7! - 6! \cdot 2 \quad (= 3600)$

(↗ vissza a feladathoz: [1.5.18](#))

2.5.19. Feladat. $6! - 4! 3! \quad (= 576)$

↗ **videó:** [5.19. Feladat](#)

(↗ vissza a feladathoz: [1.5.19](#))

2.5.2. Gráfelmélet

2.5.20. Feladat.

- (a) nem lehetséges;
- (b) lehetséges.

(↪ vissza a feladathoz: [1.5.20](#))

2.5.21. Feladat. Nem lehetséges.

↪ **videó:** [5.21. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.5.21](#))

2.5.22. Feladat. Lehetséges, 2 ilyen gráf van izomorfia erejéig, éleinek száma: 5.

↪ **videó:** [5.22. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.5.22](#))

2.5.23. Feladat. Egy ilyen gráf van izomorfia erejéig, éleinek száma: 8.

(↪ vissza a feladathoz: [1.5.23](#))

2.5.24. Feladat. Egy ilyen gráf van izomorfia erejéig, éleinek száma: 10.

(↪ vissza a feladathoz: [1.5.24](#))

2.5.25. Feladat.

- (a) van Hamilton-kör (és így Hamilton-út is);
- (b) van Hamilton-kör (és így Hamilton-út is);
- (c) van Hamilton-út, de nincs Hamilton-kör.

↪ **videó:** [5.25. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.5.25](#))

2.5.26. Feladat.

- (a) 2;
- (b) 3.

↪ **videó:** [5.26. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.5.26](#))

2.5.27. Feladat.

- (a) 3;
- (b) 6.

(↪ vissza a feladathoz: [1.5.27](#))

2.5.28. Feladat.

- (a) 2 és 18 között bármilyen egész értéket felvehet;
- (b) 3;
- (c) 9.

↪ **videó:** [5.28. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.5.28](#))

2.5.29. Feladat. 21.

↪ **videó:** [5.29. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.5.29](#))

2.5.30. Feladat.

- (a) 3;
- (b) 6.

↪ **videó:** [5.30. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.5.30](#))

2.6. Teljes indukció, rekurzív definíció, indirekt bizonyítás

2.6.1. Teljes indukció

2.6.1. Feladat. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy tetszőleges n természetes számra

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

teljesül. Bizonyítsuk az állítást a Gauss-féle gondolatmenet alapján is (teljes indukció nélkül).

Megoldás. A teljes indukció kezdő lépése: $n = 1$ esetén az állítás igaz, mivel $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás, azaz $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Indukciós lépés: az állítás igazolása $(n+1)$ -re (az indukciós feltevés felhasználásával),

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (n+1) &= \underbrace{1 + 2 + \cdots + n}_{\frac{n(n+1)}{2} \text{ (ind. felt.)}} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

Azaz az állítás $(n+1)$ -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül a feladatban szereplő egyenlőség.

Megoldás a Gauss-féle gondolatmenet alapján. Legyen $\sigma = 1 + 2 + \cdots + n$. Ekkor

$$\begin{aligned} \sigma + \sigma &= (1 + 2 + \cdots + n) + (n + (n-1) + \cdots + 1) \\ &= (1 + n) + (2 + (n-1)) + \cdots + (n + 1) \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

következtében $\sigma = \frac{n(n+1)}{2}$.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.6.1](#))

2.6.2. Feladat. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy tetszőleges n természetes számra

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

teljesül. Bizonyítsuk az állítást „geometria” eszközökkel is (teljes indukció nélkül).

Megoldás. A teljes indukció kezdő lépése: $n = 1$ esetén az állítás igaz, mivel $1 = 1^2$.

Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás, azaz $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

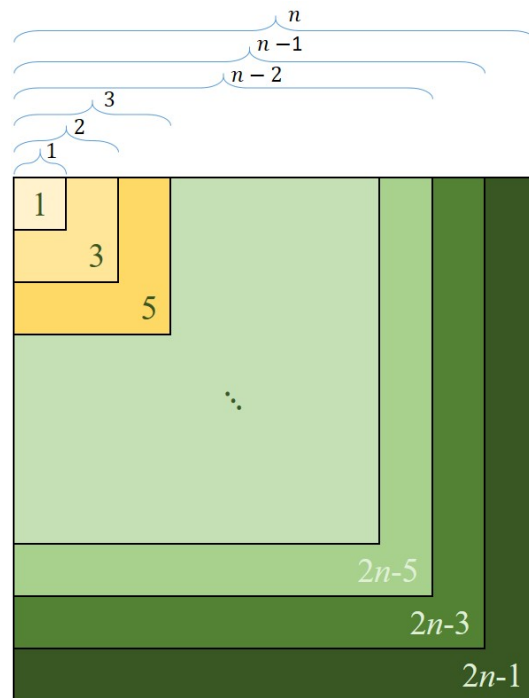
Indukciós lépés: az állítás igazolása $(n + 1)$ -re (az indukciós feltevés felhasználásával),

$$\begin{aligned}
 1 + 3 + \cdots + (2n + 1) &= \underbrace{1 + 3 + \cdots + (2n - 1)}_{n^2 \text{ (ind. felt.)}} + (2n + 1) \\
 &= n^2 + (2n + 1) \\
 &= n^2 + 2n + 1 \\
 &= (n + 1)^2.
 \end{aligned}$$

Azaz az állítás $(n + 1)$ -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül a feladatban szereplő egyenlőség.

Megoldás „geometriai” eszközökkel. Ld. 2.1. ábra.



2.1. ábra. Megoldás „geometriai” eszközökkel

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.6.2)

2.6.3. Feladat. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy tetszőleges n természetes számra

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

teljesül.

Megoldás. A teljes indukció kezdő lépése: $n = 1$ esetén az állítás igaz, mivel $1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$.

Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás, azaz $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Indukciós lépés: az állítás igazolása $(n + 1)$ -re (az indukciós feltevés felhasználásával),

$$\begin{aligned}
 1^2 + 2^2 + \cdots + (n + 1)^2 &= \underbrace{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ (ind. felt.)}} + (n + 1)^2 \\
 &= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + (n + 1)^2 \\
 &= \frac{n + 1}{6} \cdot (n(2n + 1) + 6(n + 1)) \\
 &= \frac{n + 1}{6} \cdot \underbrace{(2n^2 + 7n + 6)}_{(n+2)(2n+3)} \\
 &= \frac{(n + 1)((n + 1) + 1)(2(n + 1) + 1)}{6}.
 \end{aligned}$$

Azaz az állítás $(n + 1)$ -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül a feladatban szereplő egyenlőség.

↪ **videó:** [6.3. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.6.3](#))

2.6.4. Feladat. Hol a hiba a következő bizonyításban?

Állítás: Bármely $n \in \mathbb{N}$ -re $a^{n-1} = 1$, ahol a tetszőleges pozitív valós szám.

Bizonyítás: Ha $n = 1$, akkor $a^{n-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$ tetszőleges a pozitív valós számra.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz tetszőleges olyan $k \in \mathbb{N}$ esetén, ahol $1 \leq k \leq n$. Ekkor $(n + 1)$ -re a következőt kapjuk:

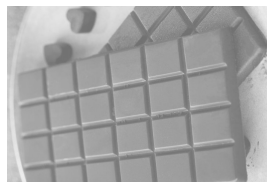
$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \cdot a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

Tehát az állítás igaz $(n + 1)$ -re is.

Megoldás. A bizonyításban az indukciós lépésnél van a hiba, ugyanis $n = 1$ esetén a tört nevezőjében $a^{1-2} = a^{-1}$ szerepel, ami egyrészt nem esik az indukciós feltevés hatókörébe, másrészt $a^{1-2} = a^{-1} = 1$ nem teljesül tetszőleges a pozitív valós szám esetén.

(↪ vissza a feladathoz: [1.6.4](#))

2.6.5. Feladat. Egy tábla csokoládét szeretnénk teljesen feldarabolni, ahol a tábla $m \times n$ kisebb „kockából” áll. Minimum hány törésre van szükség?



Megoldás. Kezdetben 1 darabunk van, a cél mn darab „kocka”. Minden törés legfeljebb 1-gyel növeli a darabok számát (egy darabot két részre választ). Ezért legalább $mn - 1$ törés kell.

Például először törjük a táblát m csíkra ($m - 1$ törés), majd minden csíkot törjük n kockára ($m(n - 1)$ törés). Összesen $(m - 1) + m(n - 1) = mn - 1$ törés. Így az alsó korlát elérhető, tehát ez a minimum.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.6.5)

2.6.6. Feladat. Igazoljuk, hogy $4 \mid 7^n + 3^{n+1}$ teljesül tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén. (Azaz 4 osztója $7^n + 3^{n+1}$ -nek tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén.)

Megoldás. A teljes indukció kezdő lépése: $n = 0$ esetén az állítás igaz, mivel $7^0 + 3^{0+1} = 4$ osztható 4-gyel.

Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás, azaz $4 \mid 7^n + 3^{n+1}$.

Indukciós lépés: az állítás igazolása $(n + 1)$ -re (az indukciós feltevés felhasználásával). Mivel

$$7^{n+1} + 3^{(n+1)+1} = 7 \cdot 7^n + 3 \cdot 3^{n+1} = 7 \cdot \underbrace{(7^n + 3^{n+1})}_{4 \mid \text{(ind. felt.)}} - \underbrace{4 \cdot 3^{n+1}}_{4 \mid},$$

ezért $4 \mid 7^{n+1} + 3^{(n+1)+1}$, azaz az állítás $(n + 1)$ -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül az állítás.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.6.6)

2.6.7. Feladat. Igazoljuk, hogy $7 \mid 2^{n+2} + 3^{2n+1}$ teljesül tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén. (Azaz 7 osztója $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ -nek tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén.)

Megoldás. A teljes indukció kezdő lépése: $n = 0$ esetén az állítás igaz, mivel $2^{0+2} + 3^{2 \cdot 0+1} = 7$ osztható 7-tel.

Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás, azaz $7 \mid 2^{n+2} + 3^{2n+1}$.

Indukciós lépés: az állítás igazolása $(n + 1)$ -re (az indukciós feltevés felhasználásával). Mivel

$$2^{(n+1)+2} + 3^{2(n+1)+1} = 2 \cdot 2^{n+2} + 9 \cdot 3^{2n+1} = 2 \cdot \underbrace{(2^{n+2} + 3^{2n+1})}_{7 \mid \text{(ind. felt.)}} + \underbrace{7 \cdot 3^{2n+1}}_{7 \mid},$$

ezért $7 \mid 2^{(n+1)+2} + 3^{2(n+1)+1}$, azaz az állítás $(n + 1)$ -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül az állítás.

$\rightsquigarrow$ videó: [6.7. Feladat](#)

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.6.7)

2.6.8. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges n természetes számra

$$\sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = n^3$$

teljesül.

Megoldás. A teljes indukció kezdő lépése: $n = 1$ esetén az állítás igaz, mivel

$$\sum_{k=1}^1 (3k^2 - 3k + 1) = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 = 1^3.$$

Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás, azaz

$$\sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = n^3.$$

Indukciós lépés: az állítás igazolása $(n+1)$ -re (az indukciós feltevés felhasználásával),

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (3k^2 - 3k + 1) &= \underbrace{\sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1)}_{n^3 \text{ (ind. felt.)}} + (3(n+1)^2 - 3(n+1) + 1) \\ &= n^3 + (3n^2 + 3n + 1) \\ &= (n+1)^3. \end{aligned}$$

Azaz az állítás $(n+1)$ -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül a feladatban szereplő egyenlőség.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.6.8](#))

2.6.9. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n természetes számra

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Megoldás. Az állítást n szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

1. Ha $n = 1$, akkor $1^3 = 1 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$; ezért az állítás $n = 1$ esetén teljesül.
2. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $(n-1)$ -re valamely $n-1 \geq 1$ esetén, azaz

$$1^3 + \dots + (n-1)^3 = \left(\frac{(n-1)n}{2} \right)^2.$$

3. Tekintsük az állítást n -re:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 &= \underbrace{(1^3 + \dots + (n-1)^3)}_{\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 \text{ (ind. felt.)}} + n^3 \\ &= \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 + n^3 \\ &= \frac{(n-1)^2 n^2}{4} + n^3 \\ &= n^2 \left(\frac{n^2 - 2n + 1}{4} + n \right) \\ &= n^2 \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{4} \right) \\ &= n^2 \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Azaz az állítás n -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül az állítás.

Megjegyzés. Mivel $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (lásd 1.6.1. Feladat), ezért az állítás úgy is megfogalmazható, hogy $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$ ($n \in \mathbb{N}$).

↪ **videó:** [6.9. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: 1.6.9)

2.6.10. Feladat. Legyen H a természetes számok részhalmazainak olyan halmaza, amely rendelkezik a tulajdonsággal, hogy ha $A_1, A_2 \in H$, akkor $A_1 \cap A_2$ is H -ban van. Mutassuk meg, hogy tetszőleges n természetes számra, ha $A_1, \dots, A_n \in H$, akkor az

$$A_1 \cap \dots \cap A_n$$

halmaz is eleme H -nak.

Megoldás. A teljes indukció kezdő lépése: $n = 1$ esetén az állítás nyilvánvalóan igaz, mivel (egy darab H -beli halmaz esetén) az A_1 halmaz metszete A_1 . Az első „igazi” eset $n = 2$ esetén lép fel, és ekkor a H -ra vonatkozó feltétel miatt lesz igaz az állítás. (Ez utóbbi esetet az indukciós lépésben is használni fogjuk.)

Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás, azaz $A_1, \dots, A_n \in H$ esetén az

$$A_1 \cap \dots \cap A_n$$

halmaz is eleme H -nak.

Indukciós lépés: az állítás igazolása $(n + 1)$ -re (az indukciós feltevés felhasználásával). Legyen $A_1, \dots, A_{n+1} \in H$. Ekkor

$$A_1 \cap \dots \cap A_{n+1} = \underbrace{(A_1 \cap \dots \cap A_n)}_{\in H \text{ (ind. felt.)}} \cap A_{n+1} \in H,$$

mivel $A_1 \cap \dots \cap A_n \in H$ és $A_{n+1} \in H$, így alkalmazható a H -ra vonatkozó feltevésünk. Azaz az állítás $(n + 1)$ -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül az állítás.

(↪ vissza a feladathoz: 1.6.10)

2.6.2. Rekurzív definíció

2.6.11. Feladat. Az a_n ($n \in \mathbb{N}$) sorozat elemeit az alábbi rekurzió definiálja:

$$a_1 = 2, \quad a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Mutassuk meg, hogy $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

Megoldás. Az állítást n szerinti teljes indukcióval igazolhatjuk.

A teljes indukció kezdő lépése: $n = 1$ esetén az állítás igaz, mivel $a_1 = 2 = 3 \cdot 2^{1-1} - 1$.

Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás, azaz $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$.

Indukciós lépés: az állítás igazolása $(n + 1)$ -re (az indukciós feltevés felhasználásával). Mivel

$$a_{n+1} = 2 \cdot \underbrace{a_n}_{3 \cdot 2^{n-1} - 1 \text{ (ind. felt.)}} + 1 = 2 \cdot (3 \cdot 2^{n-1} - 1) + 1 = 6 \cdot 2^{n-1} - 1 = 3 \cdot 2^n - 1,$$

ezért az állítás $(n + 1)$ -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül az állítás.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.6.11](#))

2.6.12. Feladat. Az a_n ($n \in \mathbb{N}$) sorozat elemeit az alábbi rekurzió definiálja:

$$a_1 = 2, a_2 = 8, a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 3).$$

Mutassuk meg, hogy $a_n = 3^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

Megoldás. Az állítást n szerinti teljes indukcióval igazolhatjuk.

A teljes indukció kezdő lépése: $n = 1$ és $n = 2$ esetén az állítás igaz, mivel $a_1 = 2 = 3^1 - 1$ és $a_2 = 8 = 3^2 - 1$.

Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy $k \leq n$ esetén igaz az állítás, azaz $a_k = 3^k - 1$, ha $1 \leq k \leq n$.

Indukciós lépés: az állítás igazolása $(n + 1)$ -re (az indukciós feltevés felhasználásával). Mivel

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4 \cdot \underbrace{a_n}_{3^n - 1 \text{ (ind. felt.)}} - 3 \cdot \underbrace{a_{n-1}}_{3^{n-1} - 1 \text{ (ind. felt.)}} \\ &= 4 \cdot (3^n - 1) - 3 \cdot (3^{n-1} - 1) \\ &= 4 \cdot 3^n - 3^n - 1 \\ &= 3^{n+1} - 1, \end{aligned}$$

ezért az állítás $(n + 1)$ -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül az állítás.

$\rightsquigarrow$ **videó:** [6.12. Feladat](#)

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.6.12](#))

2.6.13. Feladat. Definiáljuk rekurzív módon az $a_n = 3n + 2$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozatot.

Megoldás. A sorozat első eleme: $a_1 = 5$, továbbá $a_n = 3n + 2 = 3(n - 1) + 5 = 3(n - 1) + 2 + 3$, ezért $a_n = a_{n-1} + 3$.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.6.13](#))

2.6.14. Feladat. Definiáljuk rekurzív módon az $a_n = n^2 + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozatot.

Megoldás. A sorozat első eleme: $a_1 = 2$, továbbá $a_n = n^2 + 1 = (n - 1)^2 + 2n = (n - 1)^2 + 1 - 1 + 2n$, ezért $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.6.14](#))

2.6.15. Feladat. Tegnap kisebb sérülést szenvedtem, ezért az emeletre vezető lépcsőn csak úgy tudok felmenni, hogy egyet vagy kettőt lépek. Hányféleképpen mehetek fel a lépcsőn, ha annak 15 lépcsőfoka van?

Megoldás. Tekintsük általában a feladatot, azaz n lépcsőfok esetén. Ekkor az első lépésben vagy egyet lépek (és marad még $n - 1$) vagy kettőt lépek (és marad még $n - 2$). Jelölje L_n a lehetséges felmenések számát n lépcsőfok esetén. Ekkor az előbbiek szerint $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, valamint $L_1 = 1$ és $L_2 = 2$. A feladatra adott válasz $L_{15} = 987$.

↪ **videó:** [6.15. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.6.15](#))

2.6.16. Feladat. Az előző feladatban szereplő lépcsőn szeretnék ismét felmenni, de már meggyógyultam, így hármat is tudok lépni. Hányféleképpen mehetek fel a lépcsőn?

Megoldás. Az előző feladathoz hasonlóan gondolkodhatunk, de most az első lépés háromféle lehet. A rekurziós összefüggés: $L'_n = L'_{n-1} + L'_{n-2} + L'_{n-3}$, és $L'_1 = 1$, $L'_2 = 2$, $L'_3 = 4$. A feladat megoldása: $L'_{15} = 5768$.

(↪ vissza a feladathoz: [1.6.16](#))

2.6.17. Feladat. Legyen $f(1) = f(2) = 1$, valamint $n \geq 2$ esetén

$$f(n) = \begin{cases} n - f\left(\frac{n}{2}\right), & \text{ha } n \text{ páros} \\ f\left(\frac{n-1}{2}\right) + f\left(\frac{n+1}{2}\right), & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg $f(3), \dots, f(12)$ értékét. Mivel egyenlő $f(2025)$?

Megoldás. A definíció alapján számolhatjuk az $f(3), \dots, f(12)$ értékeket:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(k)$	1	1	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8

Továbbá, $f(2025) = 1350$, mivel

$$\begin{aligned} f(2025) &= f(1012) + f(1013) \\ &= (1012 - f(506)) + (f(506) + f(507)) = 1012 + f(507) \\ &= 1012 + (f(253) + f(254)) \\ &= 1012 + (f(126) + f(127)) + (254 - f(127)) = 1266 + f(126) \\ &= 1266 + (126 - f(63)) = 1392 - (f(31) + f(32)) \\ &= 1392 - ((f(15) + f(16)) + (32 - f(16))) = 1360 - f(15) \\ &= 1360 - (f(7) + f(8)) = 1350. \end{aligned}$$

Teljes indukcióval igazolhatjuk a táblázat alapján sejtendő szabályt:

$$f(3k+1) = f(3k+2) = 2k+1 \quad \text{és} \quad f(3k+3) = 2(k+1) \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

(↪ vissza a feladathoz: [1.6.17](#))

2.6.18. Feladat. Legyen $a_1 = 2$ és $a_n = 3a_{n-1} + 4$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$). Találjuk meg a sorozat zárt (nem rekurzív) alakját, vagyis adjunk meg képletet a_n -re n függvényében.

Megoldás. Számoljuk ki a sorozat első néhány elemét:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 3a_1 + 4 = 10, \quad a_3 = 3a_2 + 4 = 34, \quad a_4 = 3a_3 + 4 = 106, \quad a_5 = 3a_4 + 4 = 322.$$

Vegyük észre, hogy

$$2 = 4 \cdot 3^0 - 2, \quad 10 = 4 \cdot 3^1 - 2, \quad 34 = 4 \cdot 3^2 - 2, \quad 106 = 4 \cdot 3^3 - 2 \quad \text{és} \quad 322 = 4 \cdot 3^4 - 2.$$

Ezért azt sejtjük, hogy $a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2$ teljesül tetszőleges n természetes számra. Sejtésünket n szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

1. Korábbi számolásunk szerint a sejtésben megfogalmazott állítás igaz az $n = 1, 2, 3, 4, 5$ természetes számokra.
2. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $(n-1)$ -re valamely $n-1 \geq 5$ esetén, azaz

$$a_{n-1} = 4 \cdot 3^{n-2} - 2.$$

3. Tekintsük az állítást n -re:

$$\begin{aligned} a_n &= 3 \cdot \underbrace{a_{n-1}}_{4 \cdot 3^{n-2} - 2 \text{ (ind. felt.)}} + 4 \\ &= 3 \cdot (4 \cdot 3^{n-2} - 2) + 4 \\ &= (4 \cdot 3^{n-1} - 6) + 4 \\ &= 4 \cdot 3^{n-1} - 2. \end{aligned}$$

Azaz az állítás n -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül az állítás.

↪ **videó:** [6.18. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.6.18](#))

2.6.3. Indirekt bizonyítás

2.6.19. Feladat. Mutassuk meg, hogy végtelen sok prímszám van.

Megoldás. Tegyük fel, hogy véges sok prímszám van, legyenek ezek $p_1, \dots, p_n$. Tekintsük az $N = p_1 \dots p_n + 1$ természetes számot. Mivel $N \geq 2$, ezért felírható prímszámok szorzataként: $N = q_1 \dots q_m$. Azonban, q_1 különbözik a $p_1, \dots, p_n$ prímszámok mindegyikétől, mivel $p_1, \dots, p_n \nmid N$, de $q_1 \mid N$. Ez ellentmond annak, hogy $p_1, \dots, p_n$ az összes prímszám. Tehát feltevésünk, miszerint véges sok prímszám van, nem volt helyes.

(↪ vissza a feladathoz: [1.6.19](#))

2.6.20. Feladat. Mutassuk meg, hogy $\sqrt{2}$ nem racionális szám.

Megoldás. Tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális szám, azaz $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, ahol $a, b \in \mathbb{N}$ relatív prímek, azaz a legnagyobb közös osztójuk 1. Ekkor

$$\begin{aligned}\sqrt{2} = \frac{a}{b} &\iff a = b\sqrt{2} \\ &\iff a^2 = 2b^2\end{aligned}$$

következtében a páros egész szám, pl. $a = 2c$ ($c \in \mathbb{N}$). Így

$$(2c)^2 = 2b^2 \iff 2c^2 = b^2,$$

aminek következtében b is páros egész szám. Ellentmondást kaptunk, mivel feltevésünk szerint a és b relatív prímek. Így az a feltevésünk, hogy $\sqrt{2}$ racionális szám, nem volt helyes.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.6.20](#))

2.6.21. Feladat. Indirekt módon bizonyítsuk be, hogy a $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg q)$ formula logikai értéke mindig igaz.

Megoldás. Tegyük fel, hogy vannak olyan $p_0, q_0 \in \{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}$ igazságértékek, hogy $(p_0 \rightarrow q_0) \vee (p_0 \rightarrow \neg q_0)$ hamis. Ekkor $p_0 \rightarrow q_0$ és $p_0 \rightarrow \neg q_0$ is hamis, ugyanis $A \vee B$ pontosan akkor hamis, ha A és B is hamis. Felhasználva azt, hogy $A \rightarrow B$ pontosan akkor hamis, ha A igaz és B hamis, azt kapjuk, hogy

$$p_0 \rightarrow q_0 \text{ hamis} \iff p_0 \text{ igaz és } q_0 \text{ hamis}$$

és

$$\begin{aligned}p_0 \rightarrow \neg q_0 \text{ hamis} &\iff p_0 \text{ igaz és } \neg q_0 \text{ hamis,} \\ &\iff p_0 \text{ igaz és } q_0 \text{ igaz.}\end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy q_0 -nak igaznak és hamisnak kell lennie egyszerre, ez azonban nem teljesülhet, ellentmondásba ütköztünk. Tehát feltevésünk, miszerint a $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg q)$ formula vehet fel hamis értékeket is, nem volt helyes.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.6.21](#))

2.6.22. Feladat. Indirekt módon bizonyítsuk be, hogy a $(p \vee q) \rightarrow ((p \vee \neg q) \rightarrow p)$ formula logikai értéke mindig igaz.

Megoldás. Tegyük fel, hogy vannak olyan $p_0, q_0 \in \{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}$ igazságértékek, hogy $(p_0 \vee q_0) \rightarrow ((p_0 \vee \neg q_0) \rightarrow p_0)$ logikai értéke hamis. Ekkor $p_0 \vee q_0$ igaz és $(p_0 \vee \neg q_0) \rightarrow p_0$ hamis, ugyanis $A \rightarrow B$ pontosan akkor hamis, ha A igaz és B hamis. Mivel $p_0 \vee q_0$ több esetben is vehet fel igaz értéket, így érdemes azt vizsgálni, hogy $(p_0 \vee \neg q_0) \rightarrow p_0$ mikor hamis. Ismét implikáció a legkülső művelet, tehát $p_0 \vee \neg q_0$ logikai értéke igaz, és p_0 hamis, így $\neg q_0$ -nak igaz logikai értéket kell felvenni, azaz q_0 hamis. Ebből viszont az következik, hogy $p_0 \vee q_0$ is hamis lesz, ami ellentmond annak, hogy a $(p_0 \vee q_0) \rightarrow ((p_0 \vee \neg q_0) \rightarrow p_0)$ formulában az előtag, azaz $p_0 \vee q_0$ logikai értéke igaz. Tehát feltevésünk, miszerint a $(p \vee q) \rightarrow ((p \vee \neg q) \rightarrow p)$ formula vehet fel hamis értékeket is, nem volt helyes.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.6.22](#))

2.6.23. Feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges n természetes számra, ha $4^n - 1$ prímszám, akkor n páratlan.

Megoldás. Tegyük fel, hogy $4^n - 1$ prímszám és n nem páratlan. Ekkor n páros, pl. $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$), így

$$4^n - 1 = 4^{2m} - 1 = (4^m)^2 - 1 = (4^m - 1)(4^m + 1),$$

ami ellentmond annak, hogy $4^n - 1$ prímszám, mivel $4^m \pm 1 \geq 2$. Tehát feltevésünk, hogy n páros nem volt helyes.

↪ videó: [6.23. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.6.23](#))

2.6.24. Feladat. Mutassuk meg, hogy négy egymást követő természetes szám szorzata nem lehet négyzetszám.

Megoldás. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz. Legyen n olyan természetes szám, amelyre $n(n+1)(n+2)(n+3)$ négyzetszám, $n(n+1)(n+2)(n+3) = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$). Ekkor $n(n+2) = n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1$ és $(n+1)(n+3) = n^2 + 4n + 3 = (n+2)^2 - 1$ következtében

$$m^2 = n(n+1)(n+2)(n+3) = (n(n+2))((n+1)(n+3)) < (n+1)^2(n+2)^2 = ((n+1)(n+2))^2,$$

így $m \leq (n+1)(n+2) - 1$. Mivel $n(n+1)(n+2)(n+3) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ és $((n+1)(n+2) - 1)^2 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$, ezért $m < (n+1)(n+2) - 1$. Azonban, $((n+1)(n+2) - 2)^2 = (n^2 + 3n)^2 = n^4 + 6n^3 + 9n^2 < m^2$ következtében $(n+1)(n+2) - 2 < m$. Így az

$$(n+1)(n+2) - 2 < m < (n+1)(n+2) - 1$$

ellentmondást kapjuk, mivel m egész szám.

↪ videó: [6.24. Feladat](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.6.24](#))

2.7. Számrendszerek, Számelmélet

2.7.1. Számrendszerek

2.7.1. Feladat.

(a) $10011_2 = 19_{10}$,

(b) $10011010_2 = 154_{10}$,

(c) $11110111_2 = 247_{10} = (255_{10} - 8_{10})$,

(d) $10100011_2 = 163_{10}$,

(e) $A_{16} = 163_{10}$,

(f) $129_{16} = 297_{10}$,

(g) $13A_{16} = 314_{10}$,

(h) $25F_{16} = 607_{10}$.

↪ videó: [7.1. Feladat: \(a\) és \(c\)](#), [7.1. Feladat: \(e\) és \(h\)](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.7.1](#))

2.7.2. Feladat.

(a) $39_{10} = 100111_2$, $39 = 2^5 + 2^2 + 2^1 + 2^0$,

(b) $73_{10} = 1001001_2$, $73 = 2^6 + 2^3 + 2^0$,

(c) $141_{10} = 10001101_2$, $141 = 2^7 + 2^3 + 2^2 + 2^0$,

(d) $200_{10} = 11001000_2$, $200 = 2^7 + 2^6 + 2^3$.

↪ videó: [7.2. Feladat: \(a\) és \(c\)](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.7.2](#))

2.7.3. Feladat.

(a) $73_{10} = 49_{16}$,

(b) $259_{10} = 103_{16}$,

(c) $299_{10} = 12B_{16}$,

(d) $319_{10} = 13F_{16}$.

↪ videó: [7.3. Feladat: \(b\) és \(d\)](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.7.3](#))

2.7.4. Feladat.

(a) $1011_2 = B_{16}$,

(b) $111010_2 = 3A_{16}$,

(c) $110110_2 = 36_{16}$,

(d) $10010011_2 = 93_{16}$,

(e) $11001001_2 = C9_{16}$,

(f) $1010011101_2 = 29D_{16}$,

(g) $1011101110011100_2 = BB9C_{16}$.

↪ videó: [7.4. Feladat: \(b\) és \(f\)](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.7.4](#))

2.7.5. Feladat.

(a) $AB_{16} = 10101011_2$,

(b) $4F_{16} = 1001111_2$,

(c) $F1_{16} = 11110001_2$,

(d) $234_{16} = 1000110100_2$.

↪ videó: [7.5. Feladat: \(b\) és \(d\)](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.7.5](#))

2.7.6. Feladat.

- (a) $0,3_{10} \approx 0,01001_2$,
 (c) $0,12_{10} \approx 0,00011_2$,
 (e) $0,375_{10} = 0,011_2$,

- (b) $0,4_{10} \approx 0,01100_2$,
 (d) $0,36_{10} \approx 0,01011_2$,
 (f) $12,4_{10} \approx 1100,01100_2$.

↗ **videók:** 7.6. Feladat: (a), 7.6. Feladat: (d)
 (↗ vissza a feladathoz: [1.7.6](#))

2.7.7. Feladat.

- (a) $100110_2 + 101101_2 = 1010011_2$,
 (c) $1010111_2 + 110110_2 = 10001101_2$,
 (e) $A34F_{16} + 215_{16} = A564_{16}$,
 (g) $253A_{16} + D4B_{16} = 3285_{16}$,

- (b) $110110_2 + 10011_2 = 1001001_2$,
 (d) $1001011_2 + 101101_2 = 1111000_2$,
 (f) $13A4_{16} + F29_{16} = 22CD_{16}$,
 (h) $12BA_{16} + 39A7_{16} = 4C61_{16}$.

↗ **videók:** 7.7. Feladat: (a) és (d), 7.7. Feladat: (e) és (h)
 (↗ vissza a feladathoz: [1.7.7](#))

2.7.2. Számelmélet**2.7.8. Feladat.** Oszthatósági szabályok:

- egy egész szám osztható 2-vel $\Leftrightarrow$ utolsó számjegye osztható 2-vel;
- egy egész szám osztható 3-mal $\Leftrightarrow$ számjegyeinek összege osztható 3-mal;
- egy egész szám osztható 4-gyel $\Leftrightarrow$ utolsó két számjegyéből álló szám osztható 4-gyel;
- egy egész szám osztható 5-tel $\Leftrightarrow$ utolsó számjegye osztható 5-tel (azaz utolsó számjegye 0 vagy 5);
- egy egész szám osztható 8-cal $\Leftrightarrow$ utolsó három számjegyéből álló szám osztható 8-cal;
- egy egész szám osztható 9-cel $\Leftrightarrow$ számjegyeinek összege osztható 9-cel;
- egy egész szám osztható 10-zel $\Leftrightarrow$ utolsó számjegye osztható 10-zel (azaz utolsó számjegye 0);

(↗ vissza a feladathoz: [1.7.8](#))

2.7.9. Feladat. Jelölje $\tau(n)$ az n természetes szám osztóinak számát.

- (a) $88 = 2^3 \cdot 11$, $\tau(88) = 8$,
 (c) $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $\tau(360) = 24$
 (e) $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, $\tau(2310) = 32$,
- (b) $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$, $\tau(140) = 12$,
 (d) $495 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, $\tau(495) = 12$,
 (f) $2808 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 13$, $\tau(2808) = 32$.

↗ **videó:** 7.9. Feladat: (b)
 (↗ vissza a feladathoz: [1.7.9](#))

2.7.10. Feladat.

- (a) $a = 40 = 2^3 \cdot 5$, $b = 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, lnko: 4, lkkt: $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$,
 (b) $a = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $b = 77 = 7 \cdot 11$, lnko: 7, lkkt: $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 462$,
 (c) $a = 88 = 2^3 \cdot 11$, $b = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, lnko: 4, lkkt: $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 1320$,

- (d) $a = 140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$, $b = 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, lnko: 14, lkkt: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$,
 (e) $a = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $b = 108 = 2^2 \cdot 3^3$, lnko: 36, lkkt: $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 1080$,
 (f) $a = 495 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, $b = 525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, lnko: 15, lkkt: $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 17325$.

↪ videó: **7.10. Feladat: (b) és (e)**

(↪ vissza a feladathoz: [1.7.10](#))

2.7.11. Feladat. A hányadost jelölje q , a maradékot r .

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| (a) $q = 2$, $r = 3$, | (b) $q = 7$, $r = 3$, |
| (c) $q = 0$, $r = 0$, | (d) $q = 0$, $b = 2$, |
| (e) $q = -8$, $r = 2$, | (f) $q = -4$, $r = 7$, |
| (g) $q = 12$, $r = 1$, | (h) $q = -6$, $r = 2$. |

↪ videó: **7.11. Feladat: (b) és (f)**

(↪ vissza a feladathoz: [1.7.11](#))

2.7.12. Feladat.

- | | |
|--|---|
| (a) $\text{lnko}(a, b) \sim 8$, $\text{lkkt}(a, b) \sim 280$, | (b) $\text{lnko}(a, b) \sim 5$, $\text{lkkt}(a, b) \sim 560$, |
| (c) $\text{lnko}(a, b) \sim 3$, $\text{lkkt}(a, b) \sim 252$, | (d) $\text{lnko}(a, b) \sim 6$, $\text{lkkt}(a, b) \sim 390$, |
| (e) $\text{lnko}(a, b) \sim 23$, $\text{lkkt}(a, b) \sim 2576$, | (f) $\text{lnko}(a, b) \sim 77$, $\text{lkkt}(a, b) \sim 7007$, |
| (g) $\text{lnko}(a, b) \sim 7$, $\text{lkkt}(a, b) \sim 580139$, | (h) $\text{lnko}(a, b) \sim 13$, $\text{lkkt}(a, b) \sim 143143$. |

↪ videó: **7.12. Feladat: (b)**

(↪ vissza a feladathoz: [1.7.12](#))

2.7.13. Feladat. A 2025, az 1848 és az 1476 is osztható 3-mal, tehát ezeknek bármelyik hatványa és a hatványok összege/különbsége is osztható 3-mal.

(↪ vissza a feladathoz: [1.7.13](#))

2.7.14. Feladat. Legyen Flóra életkora n , ekkor az édesapjának az életkora $n + 28$. Mikor lesz $n \mid n + 28$ igaz? Tudjuk, hogy ha $n \mid n + 28$ és $n \mid n$, akkor $n \mid ((n + 28) - n) = 28$, azaz n osztója 28-nak. A $28 = 2^2 \cdot 7$ -nek $(2 + 1)(1 + 1) = 6$ pozitív osztója van: 1, 2, 4, 7, 14, 28. Tehát legfeljebb 6-szor lesz Flóra életkora osztója az édesapja életkorának.

↪ videó: **7.14. Feladat**

(↪ vissza a feladathoz: [1.7.14](#))

2.7.15. Feladat. Mivel $18c - 6d = 9(2c - 3d) + 21d$, így, ha $2c - 3d$ osztható 7-tel, akkor $18c - 6d$ is.

(↪ vissza a feladathoz: [1.7.15](#))

2.7.16. Feladat. Mivel $8x - 3y = 2(x + y) + (6x - 5y)$, így, ha $x + y$ és $6x - 5y$ osztható 11-gyel, akkor $8x - 3y$ is.

↪ videó: **7.16. Feladat**

(↪ vissza a feladathoz: [1.7.16](#))

2.7.17. Feladat. Mivel a $80 = 7 \cdot 11 + 3$, így péntekhez képest 3 nap múlik el, azaz hétfő lesz.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.7.17](#))

2.7.18. Feladat. A tűzijátékok színei hatosával ismétlődnek, tehát a 60, a 80 és a 103 számok 6-tal vett osztási maradékát kell vizsgálnunk: $60 = 10 \cdot 6 + 0$; $80 = 13 \cdot 6 + 2$; $103 = 17 \cdot 6 + 1$, azaz a 60. tűzijáték zöld, a 80. sárga, a 103. kék.

$\rightsquigarrow$ videó: [7.18. Feladat](#)

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.7.18](#))

2.7.19. Feladat. A kosárban legyen $n < 100$ db alma. Tudjuk, hogy $4 \mid n - 3$; $5 \mid n - 4$ és $6 \mid n - 5$. Tehát $n + 1$ osztható 4-gyel, 5-tel és 6-tal is; $n + 1 = c \cdot \text{lkkt}(4, 5, 6) = 60$, de $n < 100$, így $c = 1$. Amiből kapjuk, hogy 59 db alma van a kosárban.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.7.19](#))

2.7.20. Feladat. Hentes és zöldséges $\text{lkkt}(6, 8) = 24$ nap múlva, pénteken lesz a faluban.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.7.20](#))

2.7.21. Feladat. Maximum $\text{lko}(480, 330) = 30$ cm-es csíkok lehetnek.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.7.21](#))

2.7.22. Feladat. Maximum $\text{lko}(72, 27) = 9$ cm-esek az építőköcek élei.

$\rightsquigarrow$ videó: [7.22. Feladat](#)

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.7.22](#))

2.7.23. Feladat. Mivel $36 = 2^2 \cdot 3^2$, így n prímtényező felbontásában a 2 és a 3 pontosan első hatványon szerepel. A $2 \cdot 3$ szorzatot a következő prímek közül eggyel szorozhatjuk meg, hogy 100-nál kisebb számot kapjunk: 5, 7, 11, 13, és még az is megfelel, ha $n = 6$. Azaz 5 lehetséges értéke van n -nek: 6, 30, 42, 66, 78.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.7.23](#))

2.7.24. Feladat. $\text{lkkt}(84, 72) = 504$ másodperc múlva; ezalatt Bálint 6, Bandi 7 kört futott.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.7.24](#))

2.7.25. Feladat. $\text{lkkt}(24, 42) = 168$ m múlva.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.7.25](#))

2.7.26. Feladat. $\text{lkkt}(12, 15) = 60$ perc múlva, tehát óránként. Ez azt jelenti, hogy 7 után és délután 4 előtt 8-szor indítják egyszerre a villamosokat.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.7.26](#))

2.7.27. Feladat. Mivel $\text{lkkt}(2, 3, 5) = 30$, így egy 30 napos hónapban egyszer sportolnak mindhárman ugyanazon a napon. Továbbá $\text{lkkt}(2, 3) = 6$, $\text{lkkt}(2, 5) = 10$, $\text{lkkt}(3, 5) = 15$, tehát Dóra és Ella 5-ször, Dóra és Bori 3-szor, Ella és Bori pedig 2-szer sportol ugyanazon a napon. Ez összesen $5 + 3 + 2 - 3 = 7$ alkalom, mert le kell vonni mindhárom esetben azt a napot, amikor mindhárman sportolnak.

$\rightsquigarrow$ videó: [7.27. Feladat](#)

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.7.27](#))

2.7.28. Feladat. Minden vágás után a fejek számának a különbsége 3-mal osztható ($-8 + 14 = 6$, $-9 + 6 = -3$, $-10 + 13 = 3$), és ezek közül csak abban az esetben csökken a fejek száma, ha 9-et vág le. Így 30 db „9-es vágással” a sárkánynak már csak 10 feje marad, majd egy „10-es vágással” végez a sárkánnyal.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.7.28](#))

2.7.29. Feladat. 180 és 78.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: [1.7.29](#))

2.8. Komplex számok & Polinomok

2.8.1. Feladat.

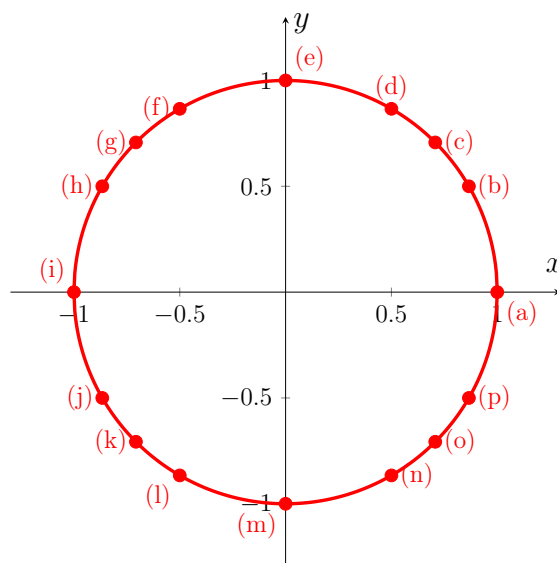
- (a) $-i$, (b) -1 , (c) $41 - 11i$, (d) $17 - 2i$,
 (e) $-15 - 5i$, (f) $-\frac{11}{17} + \frac{27}{17}i$, (g) $-\frac{3}{13} - \frac{11}{13}i$, (h) $\frac{11}{10} - \frac{23}{10}i$,
 (i) $-\frac{2}{5} + \frac{3}{10}i$.

↪ videó: [8.1. Feladat: \(a\)–\(e\)](#), [8.1. Feladat: \(f\)–\(i\)](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.8.1](#))

2.8.2. Feladat. Vegyük észre, hogy ha a φ szöget az egységkörön ábrázoljuk, akkor koordinátái: $(\cos \varphi, \sin \varphi)$. Ez indokolja, hogy a táblázatban először szerepel $\cos \varphi$ és utána $\sin \varphi$.

	fok	rad.	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$		fok	rad.	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$
(a)	0	0	1	0	(b)	30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
(c)	45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	(d)	60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
(e)	90	$\frac{\pi}{2}$	0	1	(f)	120	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
(g)	135	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	(h)	150	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
(i)	180	π	-1	0	(j)	210	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
(k)	225	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	(l)	240	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
(m)	270	$\frac{3\pi}{2}$	0	-1	(n)	300	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
(o)	315	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	(p)	330	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

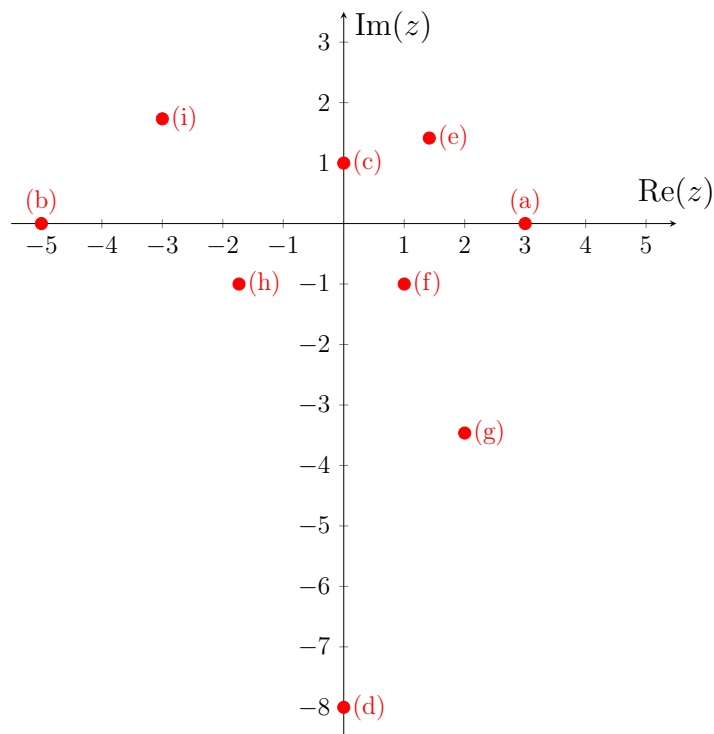


↪ videó: [8.2. Feladat: \(b\),\(c\),\(d\),\(h\),\(k\) és \(n\)](#)

(↪ vissza a feladathoz: [1.8.2](#))

2.8.3. Feladat.

- (a) $3 = 3 \cdot (\cos 0 + i \cdot \sin 0) = 3e^0$,
 (b) $-5 = 5 \cdot (\cos \pi + i \cdot \sin \pi) = 5e^{\pi i}$,
 (c) $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$,
 (d) $-8i = 8(\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2}) = 8e^{\frac{3\pi}{2}i}$,
 (e) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4}) = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$,
 (f) $1 - i = \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$,
 (g) $2 - 2\sqrt{3}i = 4(\cos \frac{5\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{3}) = 4e^{\frac{5\pi}{3}i}$,
 (h) $-\sqrt{3} - i = 2(\cos \frac{7\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{6}) = 2e^{\frac{7\pi}{6}i}$,
 (i) $-3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}(\cos \frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{6}) = 2\sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

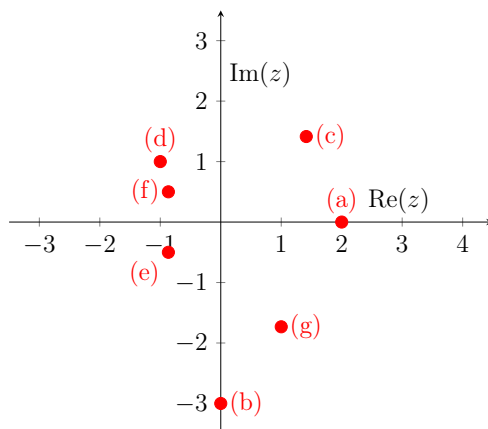


↪ videók: 8.3. Feladat (a), (c) és (f), 8.3. Feladat: (h)

(↪ vissza a feladathoz: [1.8.3](#))

2.8.4. Feladat.

- (a) $2(\cos 0 + i \sin 0) = 2$,
 (b) $3e^{\frac{3\pi}{2}i} = -3i$,
 (c) $2e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$,
 (d) $\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) = -1 + i$,
 (e) $\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$,
 (f) $e^{\frac{5\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$,
 (g) $2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}) = 1 - \sqrt{3}i$.



↪ videók: [8.4. Feladat: \(a\)–\(b\)](#), [8.4. Feladat: \(d\) és \(f\)](#)

(↪ vissza a feladathoz: 1.8.4)

2.8.5. Feladat.

- (a) $8(\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2}) = -8i$,
- (b) $20(\cos 0 + i \cdot \sin 0) = 20$,
- (c) $\cos \pi + i \cdot \sin \pi = -1$,
- (d) $2^{67}(\cos \frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{6}) = -2^{66}\sqrt{3} + 2^{66}i$,
- (e) $2^{611}(\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2}) = -2^{611}i$,
- (f) $6^{1526}(\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}) = -3 \cdot 6^{1525} + 3\sqrt{3} \cdot 6^{1525}i$.

↪ videók: [8.5. Feladat: \(a\)](#), [8.5. Feladat: \(d\)](#)

(↪ vissza a feladathoz: 1.8.5)

2.8.6. Feladat.

- (a) $3 = 3(\cos 0 + i \sin 0)$, $-3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$,
- (b) $2i = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$, $-2i = 2(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$,
- (c) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}$,
- (d) $-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i = 4(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$, $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i = 4(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$,
- (e) $-1 - 4i$, $1 + 4i$,
- (f) $\sqrt{3} + i = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$, $-\sqrt{3} - i = 2(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6})$,
- (g) $-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$, $1 + \sqrt{3}i = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$, $1 - \sqrt{3}i = 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3}))$,
- (h) $2i = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$, $-\sqrt{3} - i = 2(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6})$, $\sqrt{3} - i = 2(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})$,
- (i) $\sqrt{2}\sqrt[6]{2} + \sqrt{2}\sqrt[6]{2}i = 2\sqrt[6]{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$, $2\sqrt[6]{2}(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12})$, $2\sqrt[6]{2}(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12})$.

↪ videók: [8.6. Feladat: \(b\)](#), [8.6. Feladat: \(h\)](#)

(↪ vissza a feladathoz: 1.8.6)

2.8.7. Feladat.

- (a) $x_1 = -i$, $x_2 = i$
 $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$

- (b) $x_1 = -3 - i, x_2 = -3 + i$
 $x^2 + 6x + 10 = (x + 3 + i)(x + 3 - i)$
- (c) $x_{1,2} = -i$
 $x^2 + 2xi - 1 = (x + i)^2$
- (d) $x_1 = -2, x_2 = 1 + \sqrt{3}i, x_3 = 1 - \sqrt{3}i$
 $x^3 + 8 = (x + 2)(x - 1 - \sqrt{3}i)(x - 1 + \sqrt{3}i)$
- (e) $x_{1,2} = 0, x_3 = -3i, x_4 = 3i$
 $x^4 + 9x^2 = x^2(x + 3i)(x - 3i)$
- (f) $x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = -2i, x_4 = 2i$
 $x^4 - 16 = (x + 2)(x - 2)(x + 2i)(x - 2i)$
- (g) $x_{1,2} = -3i, x_{3,4} = 3i$
 $x^4 + 18x^2 + 81 = (x + 3i)^2(x - 3i)^2$

↪ videó:

8.7. Feladat: (b) és (g)

(↪ vissza a feladathoz: [1.8.7](#))

Szabaduló szoba