

Matematika informatikusoknak 1.

Diszkrét matematika I.

Kátai-Urbán Kamilla

7. előadás

Teljes indukció, rekurzió

Halmazelmélet

Mire használható a teljes indukció?

- Rekurzív algoritmusok igazolása teljes indukcióval.
- Rekurzívan definiált adatszerkezetek (fák, listák) tulajdonságainak vizsgálata.
- Program helyességének igazolása.
- Futási idő meghatározása.

Mire jó a rekurzió és a bizonyítás?

Rekurzió nélkül (triviális eseteket leszámítva) aligha lehetne programozni vagy programozási nyelveket definiálni!

Bizonyítás nélkül gyakran nem lehet előre tudni bizonyos dolgokat; pl. azt, hogy hány lépésben fut le egy algoritmus vagy program. Az előzetes becslés és számolás egyik kelléke a teljes indukciós bizonyítás. Előadáson azért bizonyítunk be néha egy-két dolgot, hogy gyakoroljuk az újonnan megismert fogalmakat, tételeket, hogy hozzászokjunk azok használatához. Másrészt – ha egyszer megértettük – a bizonyítás segít majd a tételeket, pontosan felidézni.

Állandó jelölések.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ a természetes számok halmaza,

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ a nemnegatív egész számok halmaza,

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ az egész számok halmaza,

$\mathbb{Q} = \{a/b : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$ a racionális számok halmaza,

$\mathbb{R}$ a valós számok halmaza.

A jelölések eredete: „natural” (természetes), „Zahl” (szám), „quotient” (kvóciens, azaz hányados), „real” (valós).

Megjegyzés.

A középiskolában használt jelöléssel ellentétben a 0-t nem tekintjük természetes számnak, hiszen az emberiség csak évezredekkel a pozitív törtekkel való számolási rutin után vezette be a 0 fogalmát.

Az *indukció* alapvető része a gondolkodásunknak, de a „sok esetből az összesre következtető” módszer nem mindig állja meg a helyét. A *teljes indukció* viszont az alaphalmaz és az elvégzett lépések miatt egy bizonyítási módszert ad a „minden n -re $H(n)$ ” típusú állítások esetén, ha n természetes szám.

Példa.

Teljes indukcióval bizonyítható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ -re az első n természetes szám összege $n(n+1)/2$ (lásd. 6. feladatsor).

Legkisebb elem létezése

Később szükségünk lesz a következő tételre.

Tétel.

Bármely nemüres, természetes számokból álló halmaznak van legkisebb eleme.

Megjegyzés.

A fenti tételben, a természetes számok halmaza helyettesíthető $\mathbb{N}_0$ -al, vagy akár az $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 7\}$ halmazzal is.

Teljes indukció tétele (n -ről $(n + 1)$ -re)

Teljes indukció tétele (1. alak).

Legyen $H(n)$ egy n -től függő állítás. Ha

- $H(1)$ igaz, és
 - bármely $n \in \mathbb{N}$ -re $H(n)$ teljesüléséből következik $H(n + 1)$ teljesülése,
- akkor igaz a „ $\forall n \in \mathbb{N}$ -re $H(n)$ ” állítás.

Megjegyzés.

A természetes számok halmaza helyett az $\mathbb{N}_0$ halmaz vagy akár a $\{7, 8, 9, \dots\}$ halmaz is szerepelhetett volna a fenti tételben, de ekkor persze $H(1)$ helyett $H(0)$ -at, illetve $H(7)$ -et (azaz a legkisebb értelmes esetet) kellett volna írunk.

Teljes indukció tétele (n -re az összes előzőből)

Teljes indukció tétele (2. alak).

Legyen $H(n)$ egy n -től függő állítás. Ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $H(1), H(2), \dots, H(n-1)$ együttes teljesüléséből következik $H(n)$ teljesülése, akkor igaz a „ $\forall n \in \mathbb{N}$ -re $H(n)$ ” állítás.

Formálisan: Ha $\forall n \in \mathbb{N}$ -re $(H(1) \wedge \dots \wedge H(n-1)) \rightarrow H(n)$, akkor $\forall n \in \mathbb{N}$ -re $H(n)$.

Megjegyzés.

A $H(1)$ állítás esetén, a $H(1)$ -et megelőző állítások $\{H(1), \dots, H(n-1)\}$ halmaza üres, ezért ezek konjunkciója definíció szerint igaz, így $H(1)$ -nek is igaznak kell lenni.

A tétel bizonyítása az előadás „Indirekt bizonyítás” részénél szerepel.

Példa.

Áll. Bizonyítsuk be teljes indukció segítségével, hogy tetszőleges n természetes számra $6 \mid n^3 + 5n$.

Biz. A teljes indukció tételének 1. alakját használjuk, $H(n): 6 \mid n^3 + 5n$.

1. lépés: $H(1)$ igaz, mivel $6 \mid 1^3 + 5 = 6$.

2. lépés: Tegyük fel $H(n)$ igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ -re, azaz $6 \mid n^3 + 5n$. Ez az úgynevezett **indukciós feltevés**.

3. lépés: Bizonyítjuk az **indukciós feltevés segítségével**, hogy az állítás $n + 1$ -re is igaz.

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 5(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 \\ &= \underbrace{(n^3 + 5n)}_{\text{az ind. felt. miatt } 6 \mid} + \underbrace{3n(n+1)}_{6 \mid \text{ mert } n(n+1) \text{ páros}} + \underbrace{6}_{6 \mid}\end{aligned}$$

Azaz, tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ -re, ha $H(n)$ igaz, akkor $H(n+1)$ is igaz. Ezért a teljes indukció tétele alapján minden n természetes számra teljesül a feladatban szereplő oszthatóság. □

Rekurzív definíció (n -ről $(n + 1)$ -re)

Rekurzív definíció (1. alak).

Gyakran nem bizonyítani, hanem definiálni akarunk valamit. A teljes indukció „párja” a **rekurzív definíció**: minden $n \in \mathbb{N}$ -re szeretnénk definiálni az $F(n)$ fogalmat. Ehhez definiáljuk a fogalmat $n = 1$ -re, azaz definiáljuk $F(1)$ -et, majd megadjuk azt, hogy tetszőleges n -re hogyan kapjuk meg $F(n + 1)$ -et $F(n)$ felhasználásával.

Megjegyzés.

Természetesen $\mathbb{N}$ helyett $\mathbb{N}_0$ -at is írhattunk volna.

Rekurzív definíció (n -re az összes előzőből)

Rekurzív definíció (2. alak).

Minden $n \in \mathbb{N}$ -re definiálni szeretnénk az $F(n)$ fogalmat úgy, hogy $F(n)$ -et a korábbi elemek ($F(1), \dots, F(n-1)$) segítségével definiáljuk.

Példa.

Ilyen típusú rekurzív definíció szerepelt ítéletkalkulusban a formulák megadásánál, valamint predikátumkalkulusban a kifejezések, illetve a formulák definíciója során.

Példa.

Legyen $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, és $n \geq 3$ esetén $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$. Ezzel rekurzív módon definiáltuk az f_n természetes számokat minden $n \in \mathbb{N}$ -re, azaz rekurzióval definiáltuk az $f_1, f_2, f_3, \dots$ végtelen számsorozatot, az ún.

Fibonacci-sorozatot.

Mire használható az indirekt bizonyítás?

- Algoritmus helyességének bizonyítása.
- Bonyolultságelméleti problémák bizonyítása.
- Program helyességének igazolása.
- Biztonsági protokollok ellenőrzése.

Indirekt bizonyítás

Indirekt bizonyítás során az állítás helyességét úgy igazoljuk, hogy feltesszük az állítás tagadását, majd megmutatjuk, hogy így ellentmondásra jutunk. Korábban a Kombinatorikáról szóló előadásban említettük már az injektív leképezés fogalmát, most pontosabb definíciót adunk, és indirekt bizonyítás segítségével igazoljuk, hogy egy leképezés injektív.

Definíció.

A $\varphi: A \rightarrow B$ **leképezés injektív**, ha A különböző elemeinek képe különböző.

Megjegyzés.

A $\varphi: A \rightarrow B$ leképezés injektivitása más szóval azt jelenti, hogy B minden elemének **legfeljebb egy őse van**, míg bijektív leképezés esetén pontosan egy őse van minden B -beli elemnek.

Példa.

Áll. Igazoljuk, hogy a $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x\varphi = (2x + 1)^2$ leképezés injektív.

Biz. Tegyük fel az állítás tagadását, azaz tegyük fel, hogy φ nem injektív.

Ekkor léteznek $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, $x_1 \neq x_2$ **pozitív valós számok**, amelyekre $x_1\varphi = x_2\varphi$.

$$\begin{aligned}x_1\varphi = x_2\varphi &\iff (2x_1 + 1)^2 = (2x_2 + 1)^2 \\&\iff |2x_1 + 1| = |2x_2 + 1| \\&\iff 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1, \text{ mivel } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \\&\iff 2x_1 = 2x_2 \\&\iff x_1 = x_2,\end{aligned}$$

ami ellentmond annak, hogy $x_1 \neq x_2$, tehát a feltevésünk, hogy φ nem injektív leképezés, nem volt helyes.

Megjegyzés.

Igazoljuk a teljes indukció tételének 2. alakját. (Az 1. alak bizonyítása hasonló.)

Áll. Ha $\forall n \in \mathbb{N}$ -re $(H(1) \wedge \dots \wedge H(n-1)) \rightarrow H(n)$, akkor $\forall n \in \mathbb{N}$ -re $H(n)$.

Biz. Az állítást indirekt úton bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz $\forall n \in \mathbb{N}$ -re $(H(1) \wedge \dots \wedge H(n-1)) \rightarrow H(n)$ teljesül, de van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $H(n_0)$ hamis.

Ekkor a $B = \{k \in \mathbb{N} : H(k) \text{ hamis}\} \subseteq \mathbb{N}$ halmaz nem üres (mivel $n_0 \in B$). Legyen n_1 a B halmaz legkisebb eleme. Az n_1 elem választása folytán $1, \dots, n_1 - 1 \notin B$, tehát $H(1) \wedge \dots \wedge H(n_1 - 1)$ igaz. Ekkor azonban a feltevésben szereplő implikáció előtagja igaz, ennek következtében $H(n_1)$ is igaz, ami ellentmond annak, hogy $n_1 \in B$. $\square$

Az indirekt bizonyítás elve akkor is alkalmazható, ha nem tudjuk az állítás igazságértékét. Elindulunk indirekt úton, és ha nem jutunk ellentmondásra, akkor kaphatunk egy ellenpéldát.

Példa.

Áll. Döntsük el, hogy a $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x\psi = (2x + 1)^2$ leképezés injektív-e.

Biz. Tegyük fel, hogy ψ nem injektív. Ekkor léteznek $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$ valós számok, amelyekre $x_1\psi = x_2\psi$.

$$\begin{aligned}x_1\psi = x_2\psi &\iff (2x_1 + 1)^2 = (2x_2 + 1)^2 \\&\iff |2x_1 + 1| = |2x_2 + 1|.\end{aligned}$$

Mivel x_1, x_2 tetszőleges valós szám lehet, így előfordulhat, hogy $2x_1 + 1 = -(2x_2 + 1)$, például $x_1 = 1$ és $x_2 = -2$ esetén. Ekkor teljesül, hogy $x_1 \neq x_2$, de $x_1\psi = x_2\psi$, tehát a ψ leképezés nem injektív.

Mire használhatók a számrendszerek?

- Digitális áramkörök működése bináris számrendszeren alapul.
- Adatok, utasítások tárolása binárisan történik a számítógépen.
- Assembly programozás.
- Memóriacímek megadása.
- Színek kódok hexadecimális (16-os) számrendszerben vannak megadva.
- Bináris számok hexadecimális számrendszerben felírva áttekinthetőbbek.
- Valós számok lebegőpontos ábrázolása.
- Titkosítás, adatvédelem.

„Számjegyek”

A megszokott decimális (tízest) számrendszerben a $0, 1, 2, \dots, 9$ számjegyeket használjuk. (Tíz ujj van a kezünkön.) Ezen az előadáson **bináris** (kettes) és **hexadecimális** (tizenhatos) számrendszerekről lesz szó, ahol a következő „számjegyek” szerepelnek:

- bináris számjegyek: $0, 1$
- hexadecimális számjegyek: $0, 1, 2, \dots, 9, A, B, C, D, E, F$

Számjegyekből álló sorozatnál mindig rögzíteni kell, hogy melyik számrendszerben van értelmezve, mi a számrendszer **alapszáma**, ezt a számjegyek után a **jobb alsó indexbe** írjuk. Ha nem szerepel alsó indexben szám, akkor decimális számrendszerben vagyunk.

Példa.

- $11_2 = 3_{10}$;
- $11_{16} = 17_{10}$.

Helyi érték

A számjegyek tényleges értéke függ attól, hogy mi a számrendszer alapszáma, és a számjegy melyik pozícióban található. A decimális számrendszerbeli értéket úgy kapjuk meg, hogy a számrendszer alapszámának megfelelő hatványával megszorozzuk a számjegyet.

Természetes számok körében ha a számjegy k , a számrendszer alapszáma a , és a számjegy jobbról számolva az n . helyen van, akkor a decimális értékét úgy kapjuk meg, hogy a k számjegyet a^{n-1} -nel megszorozzuk. Ekkor a számjegyhez tartozó **helyi érték** a^{n-1} . Figyeljünk arra, hogy természetes számok körében a jobbszélső számjegy mindig a számrendszer alapszámának 0. hatványával, azaz 1-gyel szorzódik.

Példa.

- $402_{10} = 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$
- $1011_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
- $12B_{16} = 1 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + B \cdot 16^0$

Átváltás decimális számrendszerbe

A decimális számrendszerbe való átváltásnál a helyi értékek meghatározása után el kell végezni a műveleteket azzal a megegyezéssel, hogy a hexadecimális számjegyeknél rendre $A_{16} = 10_{10}$, $B_{16} = 11_{10}$, ..., $F_{16} = 15_{10}$.

Példa.

- $1011_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8_{10} + 2_{10} + 1_{10} = 11_{10}$
- $12B_{16} = 1 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + B \cdot 16^0 = 256_{10} + 32_{10} + 11_{10} = 299_{10}$

Szokás a számokat helyi érték táblázattal is felírni, és úgy leolvasni az elvégzendő műveleteket:

Helyi érték:	2^3	2^2	2^1	2^0
	1	0	1	1

Helyi érték:	16^2	16^1	16^0
	1	2	B

Maradékos osztás

Számrendszerek közötti átváltások esetén sokszor maradékos osztások sorozatát kell elvégezni, így szükségünk van a következő tételre.

Tétel.

Ha a és b természetes számok, akkor léteznek olyan egyértelműen meghatározott q és r egész számok, amelyekre $a = bq + r$ és $0 \leq r < b$.

Definíció.

Az előző tételben szereplő a számot **osztandónak**, b -t **osztónak**, q -t **hányadosnak** és r -et **maradéknak** nevezzük.

Jelölés

Az $a = bq + r$ maradékos osztást a következő formában is írhatjuk:
 $a \div b = q$ maradék: r .

Átváltás decimálisból bináris számrendszerbe

Ahhoz, hogy decimális számrendszerből binárisba váltsunk át, a decimális számot 2-vel kell maradékosan osztani, majd a kapott hányadost kell ismét 2-vel osztani, és ezt ismételni addig, amíg a hányados 0 nem lesz.

Példa.

Átváltjuk a 11_{10} számot bináris számrendszerbe.

$$11 \div 2 = 5 \text{ maradék } 1$$

$$5 \div 2 = 2 \text{ maradék } 1$$

$$2 \div 2 = 1 \text{ maradék } 0$$

$$1 \div 2 = 0 \text{ maradék } 1$$

Vegyük észre, hogy $11_{10} = 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 0 + 1) + 0) + 1) + 1$, azaz az utoljára kapott maradék szorozódik kettő legnagyobb hatványával, tehát a maradékokat lentől felfelé kell leírni az átváltáshoz.

$$11_{10} = 1011_2$$

Példa.

$$11 \div 2 = 5 \text{ maradék } 1$$

$$5 \div 2 = 2 \text{ maradék } 1$$

$$2 \div 2 = 1 \text{ maradék } 0$$

$$1 \div 2 = 0 \text{ maradék } 1$$

Az átváltás esetén elég az osztandót és a maradékot feljegyezni, mert a hányados mindig a következő osztandóval egyezik meg, így az alábbi formába írható:

	maradék
11	1
5	1
2	0
1	1
0	

Ahogy már korábban is láttuk, a táblázatból alulról felfelé lehet leolvasni a bináris számrendszerbeli alakot:

$$11_{10} = 1011_2$$

Átváltás decimálisból hexadecimálisba

Ahhoz, hogy decimális számrendszerből hexadecimálisba váltsunk, át a decimális számot 16-tal kell maradékosan osztani, majd a kapott hányadost kell ismét 16-tal osztani, és ezt ismételni addig, amíg a hányados 0 nem lesz.

Példa.

Átváltjuk a 299_{10} számot hexadecimális számrendszerbe.

$$299 \div 16 = 18 \text{ maradék } 11$$

$$18 \div 16 = 1 \text{ maradék } 2$$

$$1 \div 16 = 0 \text{ maradék } 1$$

Itt is érvényes, hogy $299_{10} = 16 \cdot (16 \cdot (16 \cdot 0 + 1) + 2) + 11$, azaz az utoljára kapott maradék szorozódik tizenhat legnagyobb hatványával, tehát a maradékokat lentől felfelé kell leírni az átváltáshoz. A 11-es maradékot *B*-vel jelöljük a hexadecimális számban:

$$299_{10} = 12B_{16}$$

Példa.

$$299 \div 16 = 18 \text{ maradék } 11$$

$$18 \div 16 = 1 \text{ maradék } 2$$

$$1 \div 16 = 0 \text{ maradék } 1$$

Ahogy az előbb is, itt is elég a táblázatot felírni:

	maradék
299	11
18	2
1	1
0	

Alulról felfelé le lehet leolvasni a hexadecimális számrendszerbeli alakot:

$$299_{10} = 12B_{16}$$

Átváltás binárisból hexadecimális számrendszerbe

A bináris számrendszerben megadott számok sokszor nehezen áttekinthetők, így egyszerűbben kezelhetőek, ha átírjuk hexadecimális számrendszerbe. Mivel $2^4 = 16$, ezért a bináris számrendszerben megadott számokat jobbról, a legkisebb helyiértéktől kezdve **négyesével csoportosítjuk**, és egy-egy négyes bináris blokkot váltunk át hexadecimális számrendszerbe. Előfordulhat, hogy az utolsó blokk nem tartalmaz négy számjegyet, de természetesen ekkor is át tudjuk váltani.

Példa.

Váltsuk át a 1011000011_2 bináris számrendszerben megadott számot hexadecimális számrendszerbe.

Először jobbról négyesével csoportosítjuk: 10 1100 0011

Majd az így kialakult blokkokat átváltjuk: $10_2 = 2_{16}$, $1100_2 = 12_{10} = C_{16}$, $0011_2 = 3_{16}$. Tehát az átváltás:

$1011000011_2 = 2C3_{16}$

Átváltás hexadecimálisból bináris számrendszerbe

Hexadecimális számrendszerből binárisba való átváltásnál minden hexadecimális számjegyet átírunk bináris számként úgy, hogy **mindig 4 bináris számjegyet használunk**, akkor is, ha egyébként nem lenne rá szükség az érték miatt. Majd ezeket a megfelelő sorrendben egymás mellé írva megkapjuk a keresett bináris számrendszerbeli számot. Természetesen a legvégén a szám elejéről törölhetjük a felesleges nullákat.

Példa.

Váltsuk át a $12B_{16}$ hexadecimális számrendszerben megadott számot bináris számrendszerbe.

A hexadecimális számjegyek átváltva: $1_{16} = 0001_2$, $2_{16} = 0010_2$, $B_{16} = 11_{10} = 1011_2$. Tehát az átváltás:

$$12B_{16} = 000100101011_2 = 100101011_2$$

Törtek átváltása decimális és bináris között

Egy bináris számrendszerben felírt törtszám a következőképpen írható át decimálisba:

$$0,011_2 = 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,25_{10} + 0,125_{10} = 0,375_{10}$$

A decimális számrendszerbeli törtszámok (tizedes törtek) bináris átváltásakor $\frac{1}{2}$ -del osztunk, azaz **2-vel szorzunk**, majd a szorzat **egészrészét lejegyezzük**, és levonjuk a szorzatból, és az így kapott számot szorozzuk ismét 2-vel. Az algoritmusnak akkor van vége, amikor a törtrész 0 értéket vesz fel.

$$0,375 \cdot 2 = 0,75 \text{ egészrész } 0$$

$$0,75 \cdot 2 = 1,5 \text{ egészrész } 1$$

$$0,5 \cdot 2 = 1,0 \text{ egészrész } 1$$

Mivel $0,375_{10} = \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}(1 + 0)))$, így az utoljára kapott egészrész szorozódik $\frac{1}{2}$ legnagyobb hatványával, tehát most felülről lefelé kell leírni a számjegyeket:

$$0,375_{10} = 0,011_2$$

Példa.

Írjuk át bináris számrendszerbe a 0,713 tizedes törtet. Ha az algoritmus nem ér hamarabb véget, akkor 4 jegyig számoljuk a bináris számjegyeket.

$$0,713 \cdot 2 = 1,426 \text{ egészrész } 1$$

$$0,426 \cdot 2 = 0,852 \text{ egészrész } 0$$

$$0,852 \cdot 2 = 1,704 \text{ egészrész } 1$$

$$0,704 \cdot 2 = 1,408 \text{ egészrész } 1$$

Ismét fel tudjuk írni táblázatban is, ahol az egészrész előre kerül:

egészrész	
	0,713
1	0,426
0	0,852
1	0,704
1	0,408

Fentről lefelé olvassuk a számjegyeket, tehát: $0,713_{10} \approx 0,1011_2 = 0,6875_{10}$
Előfordul, hogy a véges tizedes törtek nem végesek bináris számrendszerben.

Összeadás

Összeadásnál úgy írjuk le a számokat, hogy az azonos helyi értékű számjegyek egymás alá kerüljenek. Az összeadást a legkisebb helyi értékű számjegytől kezdjük. Ha a számjegyek összege nem egyetlen számjeggyel egyenlő, akkor a nagyobb helyi értékű számjegyet továbbvisszük (átvitel), ahogy ezt már a decimális számrendszerbeli összeadásnál megszoktuk.

Példa.

Elvégezzük az $1111_2 + 1010_2$ összeadást.

$$\begin{array}{r} \\ + \\ \hline \end{array}$$

A **piros** számjegyek összeadásakor mivel $1_2 + 1_2 = 10_2$, így 1-et tovább kell vinni. A **kék** számjegyeknél hasonló a helyzet. A **sárga** számjegyeknél az átvitel bittel együtt már $1_2 + 1_2 + 1_2 = 11_2$ szerepel. Mivel elfogytak a számjegyek az összeadandóknál, így ezt már leírhatjuk.

$$1111_2 + 1010_2 = 11001_2$$

Példa.

Elvégezzük a $2A1_{16} + 3D4_{16}$ összeadást.

$$\begin{array}{r} 2\ A\ 1 \\ +\ 3\ D\ 4 \\ \hline 6\ 7\ 5 \end{array}$$

Az A és D számjegyek összeadásánál

$A_{16} + D_{16} = 10_{10} + 13_{10} = 23_{10} = 17_{16}$ tehát a 7 számjegyet leírjuk az 1-et továbbvisszük.

$$2A1_{16} + 3D4_{16} = 675_{16}$$

Feladat.

Mutassuk meg, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ -re

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \cdots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2.$$

Megoldás: ld. előadáson.

Feladat.

Vizsgáljuk meg indirekt bizonyítás segítségével, hogy a változók tetszőleges logikai értékei esetén igaz-e az alábbi formula

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p) \vee q).$$

Megoldás: ld. előadáson.

Végeredmény: igen.

Definíció.

Azokat az ítéletkalkulusbeli formulákat, amelyek a logikai változók tetszőleges logikai értékei esetén igazak **tautológiának** nevezzük.

Feladat.

Végezzük el az összeadásokat az adott számrendszerben.

(a) $11101_2 + 1011_2$

(b) $1A8_{16} + 4D3_{16}$

Megoldás: ld. előadáson.

Végeredmény:

(a) 101000_2

(b) $67B_{16}$

E-teszt: Számrendszerek, számelmélet (1. fel.)

A 6. (utolsó) elektronikus teszt nov. 21-én indul!

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek az igazak, illetve melyek hamisak. (1 pont jár, ha mind a három válasz helyes).

- Az $n = 253$ egész szám 2-es számrendszerbeli alakja 11111101_2
- Az $m = 1010111_2$ és $n = 101001_2$ számok összege 129.
- Az $m = 7A1_{16}$ és $n = 922_{16}$ számok összege 4291.

E-teszt.

- Az $n = 253$ egész szám 2-es számrendszerbeli alakja 11111101_2 .
Igaz, mert $256 = 2^8$, így $255_{10} = 11111111_2$, tehát
 $255_{10} - 2_{10} = 11111111_2 - 10_2 = 11111101_2$.
- Az $m = 1010111_2$ és $n = 101001_2$ számok összege 129.
Hamis, mert az utolsó számjegyek összege 0, így a szám nem lehet páratlan. Ugyanis az utolsó számjegy kivételével a többi számjegy 2 pozitív hatványával szorzódik, így az utolsó bit mutatja meg, hogy a szám páros vagy páratlan.
- Az $m = 7A1_{16}$ és $n = 922_{16}$ számok összege 4291. **Igaz**,

$$\begin{array}{r} 7A1 \\ + \quad 922 \\ \hline 10C3 \end{array}$$

$$10C3_{16} = 4096_{10} + 192_{10} + 3_{10} = 4291_{10}.$$