

Matematika informatikusoknak 1.

Diszkrét matematika I.

Kátai-Urbán Kamilla

6. előadás

Mire használható a gráfelmélet?

- Hálózatok modellezése (számítógép hálózatok, weboldalak).
- Útvonaltervezés (navigációs rendszerek, játékokban NPC-k mozgatása).
- Algoritmusok (gráfalgoritmusok, programfordítási sorrend, összefüggőség vizsgálat).
- Mesterséges intelligencia (fogalomháló, neurális hálók).
- Operációs rendszerek (erőforrás-kezelés, feladatütemezés).
- Bioinformatika (DNS szekvenálás gráf-modellekkel).

Definíció.

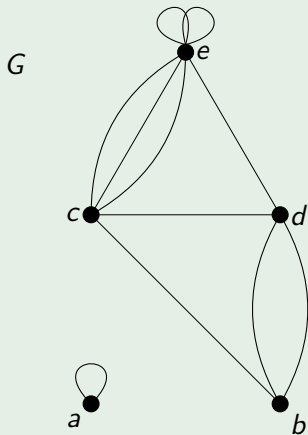
Legyenek V és E tetszőleges halmazok, és legyen $\iota: E \rightarrow \{\{u, v\} : u, v \in V\}$ leképezés. Ekkor a $G = (V, E, \iota)$ hármast **(irányítás nélküli) gráfnak** nevezzük. A $V = V(G)$ halmaz elemeit a gráf **pontjainak (csúcsainak)** nevezzük, $E = E(G)$ pedig az **élek** halmaza.

Ezután gráfon mindig irányítás nélküli gráfot értünk!

Definíció.

Legyen $G = (V, E, \iota)$ gráf. Tetszőleges $e \in E$ él esetén, ha $e\iota = \{u, v\}$, akkor u és v az e él **végpontjai**, azaz e **összeköti** az u és v csúcsokat (másképp fogalmazva e **illeszkedik** az u és v csúcsokra). Az $u = v$ esetben az e élt **hurokélnek** nevezzük.

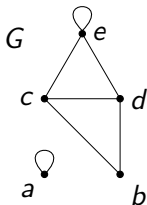
Példa.



Többszörös él nélküli gráfok

Megjegyzés.

Legyen $G = (V, E, \iota)$ olyan gráf, melyben nincs többszörös él (azaz két pontot legfeljebb egy él köt össze). Ekkor a G gráfhoz egyértelműen megadható egy olyan ϱ **szimmetrikus reláció** a V halmazon, melynek irányított gráfjában elhagyva az irányítást, és a többszörös élekből egyet megtartva éppen G -t kapjuk. Tehát egy G többszörös éleket nem tartalmazó gráf megadható a $(V; \varrho)$ párral, ahol ϱ szimmetrikus reláció a V halmazon.



$$\varrho = \{(b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c), (c, e), (e, c), (d, e), (e, d), (a, a), (e, e)\} \subseteq V \times V$$

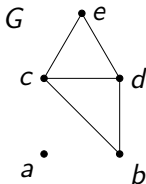
Egyszerű gráfok

Jelölés

Legyen V tetszőleges halmaz. Jelölje $\binom{V}{2}$ a V halmaz kételemű részhalmazainak halmazát.

Definíció.

Ha a G gráfban nincsenek se hurokélek, se többszörös élek, akkor a G gráfot **egyszerű gráfnak** nevezzük. Ekkor bármely élt meghatároznak a végpontjai, azaz nincs szükség a ι leképezésre, így $G = (V, E)$, ahol $E \subseteq \binom{V}{2}$.

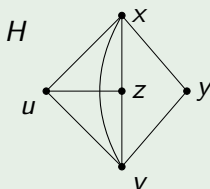
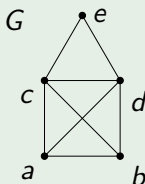


Gráf izomorfizmus

Definíció.

Azt mondjuk, hogy a G és H egyszerű gráfok **izomorfak** (jele: $G \cong H$), ha van olyan $\varphi: V(G) \rightarrow V(H)$ bijektív leképezés a pontokon, amelyre $\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{u\varphi, v\varphi\} \in E(H)$ teljesül tetszőleges $u, v \in V(G)$ pontok esetén. Azaz φ pontosan az „éleket viszi élekbe”. A φ leképezést **izomorfizmusnak** nevezzük.

Példa.



$$\varphi: V(G) \rightarrow V(H)$$

$$a\varphi = u,$$

$$b\varphi = z,$$

$$c\varphi = x,$$

$$d\varphi = v,$$

$$e\varphi = y.$$

Definíció.

A G gráf v csúcsának **fokszámán** a v -re illeszkedő élek számát értjük, úgy, hogy a hurokél kettővel növeli a fokszámot (jele: $d(v)$). Ha $d(v) = 0$, akkor v -t **izolált csúcsnak** nevezzük.

Tétel.

Bármely véges gráfban a pontok fokszámainak összege páros szám, mégpedig az élek számának kétszerese:

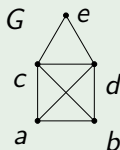
$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Bizonyítás. A fokszámok összegzésénél az éleket mindkét végpontjuknál számoljuk (és a hurokélek is duplán számítanak), így éppen az élek számának kétszeresét kapjuk.

Definíció.

A G gráfban a v csúcsból a u csúcsba vezető **séta** egy $v = v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k = u$ sorozat, ahol $v_0, v_1, \dots, v_k \in V$, és az $e_i \in E$ élek végpontjai v_{i-1} és v_i minden $i \in \{1, \dots, k\}$ esetén. Ha $v_0 = v_k$, akkor **zárt sétáról** beszélünk. A k számot a **séta hosszának** nevezzük. Ha G egyszerű gráf, akkor a sétát megadhatjuk a $v_0, v_1, \dots, v_k$ pontsorozattal, ahol $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$, bármely $i \in \{1, \dots, k\}$ esetén. Megengedjük a 0-hosszúságú sétát is, ami csak egy pontot tartalmaz.

Példa.

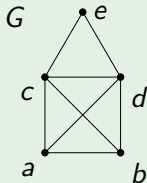


(zárt) séta: a, b, c, e, c, d, b, a

Definíció.

Ha egy séta pontsorozatában nincs ismétlődés, akkor a sétát **útnak** nevezzük. **Körnek** nevezzük az olyan legalább 1-hosszúságú zárt sétát, ahol sem az élek, sem a pontok nem ismétlődnek, kivéve a kezdő és a végpontot. (Az 1-hosszú kör egyetlen éle egy hurokél.)

Példa.



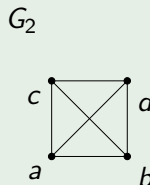
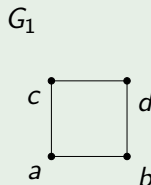
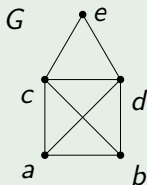
út: a, b, c, d
kör: a, b, d, c, a

Definíció.

Azt mondjuk, hogy a H gráf **részgráfja** a G gráfnak, ha $V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$, azaz a részgráfok az eredeti gráfból csúcsok és élek elhagyásával keletkeznek. Ha a H részgráf tartalmazza az összes olyan G -beli élt, amely $V(H)$ -beli csúcsokat köt össze, akkor H **feszített részgráfja** G -nek.

Példa.

G -nek G_1 részgráfja, de nem feszített részgráfja, G_2 feszített részgráf.



Definíció.

Egy gráf összefüggő, ha bármely két csúcsa között vezet séta (ekvivalensen: út).

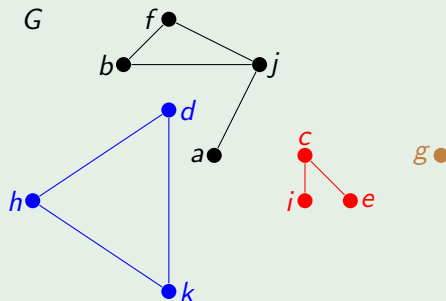
Definíció.

Egy G gráf pontjainak halmazán a $\sim$ relációt **elérhetőségi relációnak** nevezzük: $u \sim v$ akkor és csak akkor, ha G -ben vezet séta (út) u -ból v -be.

Tétel.

Tetszőleges G gráfra $\sim$ ekvivalenciareláció $V(G)$ -n. Az ekvivalenciarelációhoz tartozó osztályozás minden osztálya kifeszít egy részgráfot, ezek a G gráf **összefüggő komponensei**. Azaz az összefüggő komponensek páronként diszjunkt maximális összefüggő feszített részgráfok.

Példa.



Hamilton-út, kör

Az utazó ügynök probléma

Egy utazóügynöknek végig kell látogatnia néhány várost. Melyik a leggyorsabb útvonal? (Itt az élekhez címkék (súlyok) is vannak rendelve.)

Egyszerűsített probléma

Egy gráfban végig látogathatjuk-e az összes pontot úgy, hogy mindegyiken csak egyszer megyünk át?

Definíció.

Az olyan utat, ami egy gráf minden pontján áthalad **Hamilton-útnak** nevezzük. Az olyan kört, amely egy gráf minden pontján áthalad **Hamilton-körnek** nevezzük. (Mivel útról, illetve körről van szó, és minden csúcson át kell haladni, így minden csúcson pontosan egyszer haladunk át, kivéve a körnél a kezdő és végpontot.)

Hamilton-út, kör

Hamilton-út, illetve kör létezésére nincsen szükséges és elegendő feltétel, és a keresés is lassú (NP-teljes probléma).

(Szükséges feltételek).

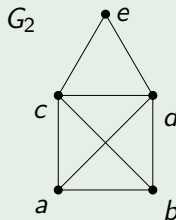
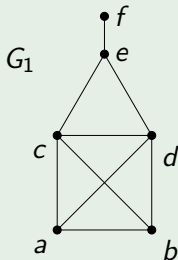
- Ha egy gráfban van Hamilton-kör, akkor egy csúcsot elhagyva a gráf összefüggő marad. (Általánosan: k csúcsot elhagyva legfeljebb k összefüggő komponensre esik szét.)
- Ha egy gráfban van Hamilton-út, akkor egy csúcsot elhagyva a gráf legfeljebb két összefüggő komponensre esik szét. (Általánosan: k csúcsot elhagyva legfeljebb $k + 1$ összefüggő komponensre esik szét.)

(Dirac-tétel) (Elégséges feltétel).

Legyen G n -pontú egyszerű gráf, ahol $n \geq 3$. Ha G -ben minden pont foka legalább $n/2$, akkor G -ben van Hamilton-kör.

Példa.

Vizsgáljuk meg, hogy van-e a gráfokban Hamilton-út, illetve Hamilton-kör.



Mindkét gráf egyszerű gráf, így az út és a kör is megadható a pontok felsorolásával.

- A G_1 gráfban van Hamilton-út, pl.: a, b, c, d, e, f . Nincs Hamilton-kör, az e csúcsot elhagyva a gráf két összefüggő komponensre esik szét.
- A G_2 gráfban van Hamilton-út, pl.: a, b, c, d, e , és van Hamilton-kör is, pl.: a, b, d, e, c, a .

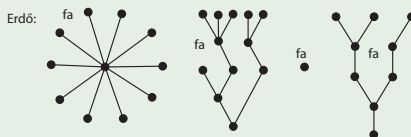
Definíció.

Egy gráfot **körmentesnek** nevezünk, ha nincsen benne kör. (Ekkor a gráfban nem szerepelhet sem hurokél, sem többszörös él, tehát a körmentes gráfok egyszerűek.)

Definíció.

A körmentes összefüggő gráfokat **fáknak** nevezzük. **Erdőnek** nevezzük az olyan gráfot, amelynek komponensei fák (azaz a körmentes gráfok az erdők).

Példa.



Fák ekvivalens jellemzése (1.)

Tétel.

A következők ekvivalensek tetszőleges G gráf esetén.

- ❶ G fa (összefüggő, körmentes);
- ❷ G összefüggő, de bármely élt elhagyva már nem lesz összefüggő;
- ❸ G körmentes, de bármely új él hozzávételével már keletkezik kör.

Bizonyítás: $(1) \Leftrightarrow (2)$: Legyen G összefüggő. Ha G -ben van kör, akkor legyen annak egy éle e , ekkor az e élt elhagyva a G még mindig összefüggő, ugyanis a két végpontja illeszkedett egy körre, tehát e elhagyása után is van út közöttük. (Ha e hurokél, akkor annak elhagyása sem befolyásolja az összefüggőséget.) Fordítva, ha van olyan e él, amit elhagyva összefüggő maradt a gráf, e két végpontja össze van kötve egy e -t nem tartalmazó úttal, tehát van G -ben kör. Azaz a kör létezése G -ben ekvivalens azzal, hogy van olyan él, melyet elhagyva a gráfból a gráf még összefüggő marad. Tehát ha G összefüggő, a körmentesség azzal ekvivalens, hogy bármely élt elhagyva már nem lesz G összefüggő.

Fák ekvivalens jellemzése (1.)

Tétel.

A következők ekvivalensek tetszőleges G gráf esetén.

- 1 G fa (összefüggő, körmentes);
- 2 G összefüggő, de bármely élt elhagyva már nem lesz összefüggő;
- 3 G körmentes, de bármely él hozzávételével már keletkezik kör.

Bizonyítás (folyt.): $(1) \Rightarrow (3)$: Legyen G körmentes. Ha G összefüggő és hozzáveszünk G -hez tetszőlegesen egy élt, pl. az u, v pontokat összekötő e élt, akkor keletkezni fog kör. Ugyanis, ha $u = v$, akkor a hurokél segítségével 1-hosszú kört kapunk. Ha $u \neq v$, akkor G összefüggősége miatt van út u -ból v -be, ami az e éllel együtt kört alkot.

$(3) \Rightarrow (1)$: Ha G körmentes, de bármely él hozzávételével már keletkezik kör, akkor az él hozzávétele előtt is volt út az él végpontjai között, tehát G összefüggő.

Fák ekvivalens jellemzése (2.)

Tétel.

Tetszőleges n -csúcsú G gráfra ekvivalensek a következők.

- 1 G fa;
- 2 G összefüggő és $n - 1$ éle van;
- 3 G körmentes és $n - 1$ éle van.

Definíció.

Egy fa 1 fokú pontjait **leveleknek** nevezzük.

Tétel.

Minden legalább kétpontú véges fának legalább két levele van.

Feladat.

Lehetséges-e, hogy egy egyszerű gráf pontjainak fokszáma a következő:

- (a) 1, 2, 3, 4, 4, 5;
- (b) 1, 1, 2, 3, 5, 8;
- (c) 1, 1, 2, 3, 4, 5;
- (d) 1, 2, 2, 3, 4.

Megoldás: ld. előadáson.

Végeredmény:

- (a) nem;
- (b) nem;
- (c) nem;
- (d) igen.

Feladat.

Mi kerülhet a kérdőjelek helyére, ha egy 6-pontú egyszerű gráf fokszámai a következők: $2, 2, 5, 5, ?, ?$.

Megoldás: ld. előadáson.

Végeredmény: Lehet $2, 2$ vagy $3, 3$.

Feladat.

Van-e Hamilton-út, kör a következő gráfokban:

Feladat.

Egy 10 csúcsú fa fokszámai: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, ?. Határozza meg a hiányzó fokszámot!

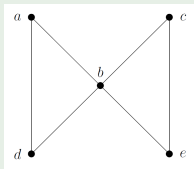
Megoldás: ld. előadáson.

Végeredmény: 2.

E-teszt: Gráfelmélet (1., 2. fel.)

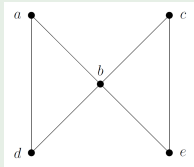
E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek az igazak, illetve melyek hamisak az alábbi G gráfra. (1 pont jár, ha mind a három válasz helyes).



- G fa.
- G -ben d, a, b, c, e maximális hosszúságú séta.
- G -ben van Hamilton-kör.

E-teszt.



- G fa. **Hamis**, mert G -ben van kör, pl: a, b, d .
- G -ben d, a, b, c, e maximális hosszúságú séta. **Hamis**, mert egy sétában ismétlődhetnek a pontok, így pl. d, a, b, c, e, b, a is egy séta.
- G -ben van Hamilton-kör. **Hamis**, mert a b pontot elhagyva a gráf 2 komponensre esik szét. Nem tudunk megadni olyan kört, ami minden ponton pontosan egyszer halad át.