

Matematika informatikusoknak 1.

Diszkrét matematika I.

Kátai-Urbán Kamilla

5. előadás

Mi a cél, mire használható?

Kombinatorika célja bizonyos véges halmazok elemszámának meghatározása.

- Programok futási idejének becslése.
- Adattárolás tervezése.
- Hibajavító kódok tervezése.
- Gépi tanulási algoritmusok elemzése.
- Játékok elemzése.
- Titkosítás erősségének vizsgálata.

□□□□□□□□□□□□□□□□

UNCOMMON
(NON-GIBBERISH)
BASE WORD

ORDER
UNKNOWN

Tr0ub4dor &3

CAPS?
□

COMMON
SUBSTITUTIONS
□□□

NUMERAL
□□□

PUNCTUATION
□□□□

(YOU CAN ADD A FEW MORE BITS TO
ACCOUNT FOR THE FACT THAT THIS
IS ONLY ONE OF A FEW COMMON FORMATS.)

~28 BITS OF ENTROPY

□□□□□□□□

□□□□□□□□

□□□

□□□□

□

□□□

□

$2^{28} = 3 \text{ DAYS AT}$
1000 GUESSES/SEC

(PLAUSIBLE ATTACK ON A WEAK REMOTE
WEB SERVICE. YES, CRACKING A STOLEN
HASH IS FASTER, BUT IT'S NOT WHAT THE
AVERAGE USER SHOULD WORRY ABOUT.)

DIFFICULTY TO GUESS:
EASY

WAS IT TROMBONE? NO,
TROUBADOR. AND ONE OF
THE 0s WAS A ZERO?

AND THERE WAS
SOME SYMBOL...



DIFFICULTY TO REMEMBER:
HARD

correct horse battery staple

□□□□□□
□□□□□□

□□□□□□
□□□□□□

□□□□□□
□□□□□□

□□□□□□
□□□□□□

FOUR RANDOM
COMMON WORDS

~44 BITS OF ENTROPY

□□□□□□□□□□

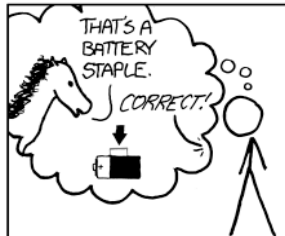
□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□

$2^{44} = 550 \text{ YEARS AT}$
1000 GUESSES/SEC

DIFFICULTY TO GUESS:
HARD



DIFFICULTY TO REMEMBER:
YOU'VE ALREADY
MEMORIZED IT

THROUGH 20 YEARS OF EFFORT, WE'VE SUCCESSFULLY TRAINED
EVERYONE TO USE PASSWORDS THAT ARE HARD FOR HUMANS
TO REMEMBER, BUT EASY FOR COMPUTERS TO GUESS.

Szorzási szabály

A **szorzási szabály** akkor alkalmazható, ha a , b elemeket választunk ki, úgy, hogy bárhogy is választjuk ki az a elemet, ugyanannyiféleképpen választhatjuk ki a b elemet az a mellé. Ekkor a két kiválasztási lehetőség számát összeszorozzuk. (Természetesen nem csak két elem kiválasztásakor alkalmazható.)

Példa.

Hány olyan **kétbetűs** (nem feltétlenül értelmes) **szó** készíthető a huszonhat betűs angol ábécéből, amelyik két **különböző** betűből áll?

Megoldás. Az első betűt 26-féleképpen választhatjuk ki. A második betű választása függ az elsőtől, de bármit is választottunk elsőnek, a második betűt 25-féleképpen választhatjuk ki. Alkalmazhatjuk a szorzási szabályt, a két különböző betűből álló szavak száma: $26 \cdot 25$.

Megjegyzés.

- Az előző példában függött a második betű választása az elsőtől, de alkalmazható volt a **szorzási szabály**, mert a második betű választására adódó **választási lehetőségek száma nem függött** attól, hogyan választottuk ki az első betűt.
- Az előző példára gondolhatunk úgy is, hogy azon (a, b) elempárok számát kell megadnunk, ahol $a \in A$ és $b \in B = A \setminus \{a\}$. Azaz a B halmaz függ az a elemtől, de $|B| = |A| - 1$ függetlenül az a elem választásától, tehát az elempárok száma $|A| \cdot (|A| - 1)$.

Osztási szabály

Az **osztási szabály** akkor alkalmazható, ha az összes esetet többször számoljuk, ekkor a megfelelő számmal leosztunk.

Példa.

Hányféleképpen állíthatunk elő **kételemű halmazt** a huszonhat betűs angol ábécéből?

Megoldás. Mivel kételemű halmazról van szó, így két különböző betűt kell tartalmaznia. Az előző példához hasonlóan az első betűt 26-féleképpen választhatjuk ki, a másodikat pedig 25-féleképpen, azaz összesen $26 \cdot 25$ -féleképpen. Ilyenkor kétszer számoljuk az eseteket, például azt is számoltuk, amikor az a -t választottuk ki, és aztán a b -t, és azt is, amikor először a b -t választottuk, aztán az a -t, de mindkét esetben az $\{a, b\}$ halmazt kapjuk. Alkalmazhatjuk az osztási szabályt, így a kételemű halmazok száma: $\frac{26 \cdot 25}{2}$.

Kivonási szabály

A **kivonási szabály** akkor alkalmazható, ha olyan eseteket is számolunk, amit nem kellene, ekkor ezeket kivonjuk.

Példa.

Hány olyan **kétbetűs** (nem feltétlenül értelmes) szó készíthető a huszonhat betűs angol ábécéből, amelyek két **különböző** betűből áll, és az **első betű nem az a betű**?

Megoldás. Először meghatározzuk, a két különböző betűből álló szavak számát, ami $26 \cdot 25$ (lásd. első példa). Azon kétbetűs szavak száma pedig, amelyek *a* betűvel kezdődnek 25, ugyanis a második betű bármi lehet *a*-n kívül. Alkalmazható a kivonási szabály: $26 \cdot 25 - 25 = 625$ -féle megfelelő szó van.

Megjegyezzük, hogy a feladat kivonási szabály nélkül is megoldható, az első betű 25-féleképpen választható (*a* nem lehet), a második is 25-féleképpen (nem lehet az első betű, de *a* lehet), így $25 \cdot 25 = 625$.

Kombinatorikai alapelvek - Összeadási szabály

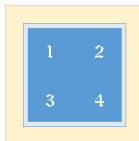
Összeadási szabály

Az **összeadási szabály** akkor alkalmazható, ha diszjunkt halmazokra tudjuk bontani a megszámlolandó esetek halmazát. A diszjunkt esetek számát összeadva kapjuk az összes esetet.

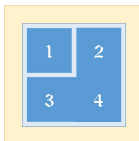
Példa.

Határozzuk meg, hogy 4-elemű halmazon hány osztályozás van.

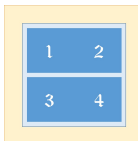
Megoldás. Az ábrán látható diszjunkt esetek számát összeadva kapjuk, hogy 4-elemű halmazon $1 + 4 + 3 + 6 + 1 = 15$ osztályozás van.



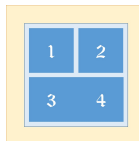
1 db



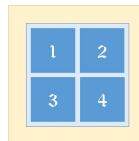
4 db



3 db



6 db



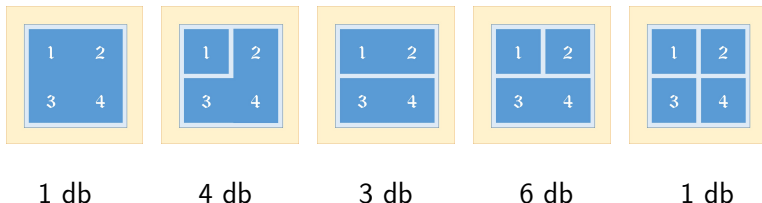
1 db

Kombinatorikai alapelvek - Bijekció

A halmazok számosságánál (elemszámánál) már láttuk, hogy ha létezik $A \rightarrow B$ bijektív leképezés (bijekció), akkor $|A| = |B|$. Ez hasznos lehet, ha B eleminek összeszámlálása egyszerűbb, mint A elemeinek.

Példa.

Meghatározzuk, hogy hány ekvivalenciareláció van 4-elemű halmazon. Mivel az ekvivalenciák és az osztályozások között megadható bijekció, valamint 4-elemű halmazon 15 osztályozás van, így ekvivalenciarelációból is 15 van 4-elemű halmazon.



Kombinatorikai alapfeladatok

- Sorba rakjuk az elemeket: permutáció
 - az elemek különbözőek: ismétlés nélküli permutáció
 - az elemek között van azonos: ismétléses permutáció
- Kiválasztjuk az elemeket:
 - a kiválasztásnál számít a sorrend: variáció
 - az elemek különbözőek: ismétlés nélküli variáció
 - az elemek között van azonos: ismétléses variáció
 - a kiválasztásnál nem számít a sorrend: kombináció
 - az elemek különbözőek: ismétlés nélküli kombináció
 - az elemek között van azonos: ismétléses kombináció

Rendszer

Egy halmazban minden elem csak egyszer szerepel. Ha olyan összességről van szó, amelyben egy elem többször is szerepelhet, akkor **rendszernek** nevezzük. Tehát egy rendszerben nem számít az elemek sorrendje, de minden elemnél fontos, hogy hányszoros eleme az összességnek, azaz mennyi a **multiplicitása**.

(Ismétlés nélküli) permutáció

Definíció.

Legyen A n -elemű halmaz, A elemeinek egy sorbarende­zését az A halmaz **(ismétlés nélküli) permutációjának** nevezzük. Ha $A = \{1, \dots, n\}$, akkor a permutációt megadhatjuk $A \rightarrow A$ bijekcióval is. (A permutációkkal, mint véges halmazokat önmagukra képező bijekciókkal a Diszkrét matematika II. tárgyban lesz szó.)

Tétel.

Egy n -elemű halmaz (ismétlés nélküli) permutációinak száma
$$n \cdot (n - 1) \cdots 2 \cdot 1 = n!.$$

Megjegyzés.

Amikor n elem (ismétlés nélküli) permutációinak számát meghatározzuk, akkor arra a kérdésre adunk választ, hogy hányféleképpen lehet n elemet sorbarendezni, azaz hány **(teljes) rendezési reláció** adható meg egy n -elemű halmazon.

Példa.

Hányféleképpen lehet a huszonhat betűs angol ábécé betűit sorbarendezni?

Megoldás. Az első betűt 26-féleképpen választhatjuk ki, a másodikat 25-féleképpen függetlenül attól, hogy először milyen betűt használtunk. A harmadik betűt 24-féleképpen választhatjuk, és így tovább. Alkalmazható a szorzási szabály, így a sorbarendezések száma: $26 \cdot 25 \cdots 2 \cdot 1 = 26!$.

Definíció.

Egy ismétlődéseket tartalmazó rendszer sorbarendezeit **ismétléses permutációnak** nevezzük.

Példa.

Hányféleképpen lehet sorbarendezeni a MISSISSIPPI szó betűit?

Tétel.

Adott $n, r \in \mathbb{N}$ és $k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$. Ha tekintünk egy n -elemű rendszert, ahol r -féle különböző elem van, és ezek multiplicitása rendre $k_1, k_2, \dots, k_r$, (azaz ennyi példányban szerepelnek a rendszerben), akkor a rendszer ismétléses permutációinak száma:

$$\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}.$$

Példa.

Hányféleképpen lehet sorbarendezni a MISSISSIPPI szó betűit?

Megoldás. A szó betűi: M, I, I, I, I, S, S, S, S, P, P a fenti tétel jelöléseivel $n = 11$, $r = 4$, $k_1 = 1$, $k_2 = 4$, $k_3 = 4$, $k_4 = 2$, $1 + 4 + 4 + 2 = 11$. Ha mind a 11 betű különböző lenne, akkor $11!$ -féleképpen lehetne sorbarendezni a betűket, de vannak ismétlődő betűk, tehát, amikor ezeket cserélgetjük egymás között nem kapunk újabb sorrendet, így alkalmazható az osztási szabály minden ilyen ismétlődés esetén: $\frac{11!}{1!4!4!2!}$.

Ismétlés nélküli variáció

Definíció.

Ha egy n -elemű halmazból kiválasztunk k elemet úgy, hogy sorrendet figyelembe vesszük, akkor n -elem k -adosztályú **ismétlés nélküli variációjáról** beszélünk.

Tétel.

Egy n -elemű halmaz k -adosztályú ismétlés nélküli variációinak száma $n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1)$.

Példa.

Hány olyan **kétbetűs** (nem feltétlenül értelmes) **szó** készíthető a huszonhat betűs angol ábécéből, amelyek két **különböző** betűből áll?

A szorzási szabálynál láttuk már ezt a példát. A tétel jelöléseit használva: $n = 26$, $k = 2$, tehát $26 \cdot (26 - 2 + 1)$ -féle szó képezhető. Tehát a szorzat mindig k tényezős, és a szorzási szabállyal megkapható.

Megjegyzés.

Egy n elemű halmaz k -adosztályú ismétlés nélküli variációjára úgy is gondolhatunk, mint egy k -elemű halmaznak egy n -elemű halmazba való olyan leképezésére, ahol az elemek képe különböző (ezek az ún. injektív leképezések). Ekkor az első elem képe még n -féle lehet, a másodiké, nem egyezhet meg az elsővel, így $(n - 1)$ -féle lehet, és így tovább, a k . elem képe $(n - k + 1)$ -féle.

Megjegyzés.

Megjegyezzük, hogy n elem (ismétlés nélküli) permutációja speciális esete n elem k -adosztályú ismétlés nélküli variációjának, mégpedig a $k = n$ esetnek felel meg. Azaz n elemből n elemet választunk úgy, hogy számít a sorrend.

Definíció.

Ha egy n -elemű halmazból kiválasztunk k elemet úgy, hogy az elemek sorrendjét figyelembe vesszük, és egy elemet többször is választhatunk, akkor n -elem k -adosztályú **ismétléses variációjáról** beszélünk.

Tétel.

Egy n -elemű halmaz k -adosztályú ismétléses variációinak száma n^k .

Példa.

Hány **kétbetűs** (nem feltétlenül értelmes) **szó** készíthető a huszonhat betűs angol ábécéből?

Megoldás. Az első betű 26-féleképpen választható, mivel nincs olyan megkötés, hogy a betűk különbözőek legyenek, így a második is 26-féle lehet. Alkalmazható a szorzási szabály, így $26 \cdot 26 = 26^2$ darab szó van.

Megjegyzés.

Egy n elemű halmaz k -adosztályú ismétléses variációjára úgy is gondolhatunk, mint egy k -elemű halmaznak egy n -elemű halmazba való leképezésére (most nincs semmi megszorítás). Ekkor a k -elemű halmazban minden elem képe n -féle lehet, így összesen n^k -féle leképezés van.

Megjegyzés.

Egy n elemű A halmaz k -adosztályú ismétléses variációja nem más, mintha az $A \times A \times \cdots \times A = A^k$ halmazból választanánk ki egy $(a_1, \dots, a_k)$ elem k -ast. Ekkor a választási lehetőségek száma éppen az A^k halmaz elemszáma: $|A^k| = |A|^k = n^k$.

Definíció.

Ha egy n -elemű halmazból kiválasztunk k elemet úgy, hogy a sorrendet nem vesszük figyelembe, akkor n -elem k -adosztályú **ismétlés nélküli kombinációjáról** beszélünk. Azaz n elemű halmazból k -elemű részhalmazzal választunk ki.

Példa.

Hányféleképpen állíthatunk elő **kételemű halmazzal** a huszonhat betűs angol ábécéből?

Tétel.

Egy n -elemű halmaz k -adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma (azaz n -elemű halmaz k -elemű részalmazainak száma)

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Példa.

Hányféleképpen állíthatunk elő **kételemű halmazt** a huszonhat betűs angol ábécéből?

Az osztási szabálynál láttuk már ezt a példát. A tétel jelöléseit használva: $n = 26$, $k = 2$, tehát $26 \cdot (26 - 2 + 1)$ -féle szó képezhető, de most csak a betűk halmaza számít, tehát a betűk sorrendjével, $2!$ -sal le kell osztani:

$$\frac{26 \cdot (26 - 2 + 1)}{2 \cdot 1} = \binom{26}{2}.$$

Definíció.

Az előző tételben szereplő $\binom{n}{k}$ kifejezést (ahol $0 \leq k \leq n$) **binomiális együtthatónak** nevezzük.

Megjegyzés.

Egy n -elemű halmaz k -ad osztályú ismétlés nélküli variációinak számát úgy is megkaphatjuk, hogy először kiválasztunk az n elemű halmazból k elemű részhalmazt, ezt $\binom{n}{k}$ -féleképpen tehetjük meg, majd a k elemet sorbarendezzük. Tehát $\binom{n}{k} \cdot k!$ -féleképpen választhatunk ki n -elemű halmazból k elemet, ha a kiválasztás sorrendje is számít.

Legyen $n, r \in \mathbb{N}$ és $k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$. Egy n -elemű halmazt szeretnénk rendre $k_1, k_2, \dots, k_r$ -elemű részhalmazokra bontani, hányféleképpen tehetjük ezt meg?

- Gondolhatunk úgy is a problémára, hogy először kiválasztunk az n -elemű halmazból k_1 elemet, majd a maradékból k_2 -t, és így tovább, ekkor a következőt kapjuk: $\binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{k_r}{k_r}$.
- Megoldhatjuk az összeszámlálást úgy is, hogy sorbarendezzük az n elemet, és az első k_1 darab kerül az első részhalmazba, a következő k_2 darab a második részhalmazba, és így tovább. Ekkor az azonos részhalmazba kerülők sorbarendezésével osztani kell, hiszen azokat az elemeket nem különböztetjük meg, tehát az ismétléses permutációnál látott formulát kapjuk: $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$.

A kétféle kiszámításból

$$\binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{k_r}{k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!},$$

ahol $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$.

Definíció.

Ha egy n -elemű halmazból kiválasztunk k elemet úgy, hogy a sorrendet nem vesszük figyelembe, és egy elemet többször is választhatunk, akkor n -elem k -adosztályú **ismétléses kombinációjáról** beszélünk. Azaz n elemű halmazból k -elemű részrendszert választunk ki.

Példa.

Hányféleképpen választhatunk háromféle drabsébből öt darabot, ha csak az számít, hogy mi van a kezünkben a kiválasztás után (nem számít a választás sorrendje)?

Megoldás. A szokásos módszer az úgynevezett „karika-pálcika” megfontolás.

Azaz tekintünk öt darab „ízetlen” drabsét, és két darab pálcikát, mert a háromféle ízű dolgot két elválasztó jellel kijelölhetjük, például $\circ \circ \circ | \circ \circ |$ azt jelöli, hogy az elsőfélébből hármat veszünk, a másodikfélébből kettőt, a harmadikfélébből egyet sem.

A karikák és pálcikák különböző sorbarendeázésének száma megegyezik a feladatra adott válasszal. Összesen $(3 - 1) + 5$ jelünk van, amiből $3 - 1$ illetve 5

megegyező, tehát a sorbarendeázések száma:
$$\frac{((3 - 1) + 5)!}{(3 - 1)!5!} = \binom{(3-1)+5}{5}.$$

Tétel.

Egy n -elemű halmaz k -adosztályú ismétléses kombinációinak száma (azaz n -elemű halmaz k -elemű részrendszereinek száma)

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

- Az ismétléses kombinációk számát NEM tudjuk úgy meghatározni, hogy tekintjük az ismétléses variációk számát, majd elosztjuk a sorrenddel, mert itt nem ismerjük, hogy melyik elemből mennyi van.
- Ahogy az előző feladatban is láttuk, n -elemű halmaz k -adosztályú ismétléses kombinációira gondolhatunk úgy, n fajta dologból választunk k darabot, és lehet egy fajtából többet is választani. Azaz $(n-1)$ „pálcikánk” van, ami a különböző fajtákat választja el, és k darab „karikánk” van a kiválasztott elemek jelzésére. Ezek sorbarendezeinek száma a tételben megadott értékkel egyezik meg.

Feladat.

Hányféleképpen tölthetünk ki egy totószelvényt? (A magyar totón 14 meccs végeredményére lehet fogadni, és mindegyik meccs kimenetele háromféle lehet: 1, 2 vagy x.)

Alapfeladat: ismétléses variáció

Végeredmény: 3^{14}

Feladat.

Hány olyan leképezés van egy 5-elemű halmazból egy 7-elemű halmazba, ahol minden elem képe különböző?

Alapfeladat: ismétlés nélküli variáció

Végeredmény: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

Feladat.

Egy igazgatótanácsban 10 ember ül, és ki akarják maguk közül választani, hogy ki legyen a vezérigazgató és a helyettese. Hányféleképpen végződhet a választás?

Alapfeladat: ismétlés nélküli variáció

Végeredmény: $10 \cdot 9$

Feladat.

Egy kerékpárlakaton egy 4 számjegyből álló kombináció nyitja és zárja a zárszerkezetet. Elfelejtettük ezt a kombinációt. Legrosszabb esetben hány kombinációt kell végigpróbálni?

Alapfeladat: ismétléses variáció

Végeredmény: 10^4

Feladat.

Hányféle különböző sorrendje van a „MATEMATIKA” szó betűinek?

Alapfeladat: ismétléses permutáció

Megoldás: ld. előadáson.

Végeredmény: $\frac{10!}{2!3!3!1!1!1!}$

Feladat.

Hányféleképpen osztható szét 100000 forintnyi jutalom 3 dolgozó között, ha mindenki csak 10000-rel osztható összeget kaphat?

Alapfeladat: ismétléses kombináció

Megoldás: ld. előadáson.

Végeredmény: $\frac{((3-1)+10)!}{(3-1)!10!} = \binom{12}{10}$

Feladat.

Hányféleképpen szállhat fel egymás után Andi, Betti, Csaba, Dani, Eszter a buszra, ha Betti és Csaba nem szállhatnak fel egymás után semelyik sorrendben?

Alapelv: kivonás

Megoldás: ld. előadáson.

Végeredmény: $5! - 2 \cdot 4!$

Feladat.

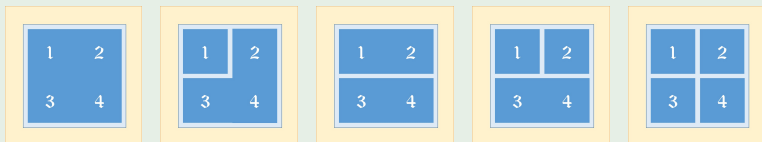
Egy horgászversenyen 18 induló van, és 4 stég. Hányféleképpen helyezkedhetnek el a stégeken, ha akár egy stégen is elférnek mindannyian?

Megoldás: ld. előadáson.

Végeredmény: $\frac{(18 + 3)!}{3!}$

Feladat.

Meghatározzuk, hogy hány osztályozás van 4-elemű halmazon.



$$\text{Végeredmény: } 1 + \binom{4}{1} + \frac{1}{2} \binom{4}{2} + \binom{4}{2} + 1 = 1 + 4 + 3 + 6 + 1 = 15$$

E-teszt: Kombinatorika (1., 2. fel.)

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek az igazak, illetve melyek hamisak (1 pont jár, ha mind a három válasz helyes).

- Ha 3 diák vizsgázott és semelyikük sem bukott meg, akkor 729-féle eredmény születhetett. Az értékelés tízfokozatú ($0 = \text{bukás}, 1, 2, \dots, 9$).
- Egy bárban 6-féle whisky-t kaphatunk (mindegyikből bőven van). Ha ezekből szeretnénk 4 üveggel vásárolni, akkor ezt 126-féleképpen tehetjük meg.
- A TJMIH társasjátékban 60 zsetonnal játszunk. A zsetonoknak 10-féle színe van, és egy színen belül 6-féle különböző értékük lehet. Ha 3 zsetont szeretnénk kiválasztani úgy az összes zseton közül, hogy ne legyen mind a 3 zseton azonos színű, akkor ezt $\binom{60}{3} - \binom{54}{3}$ -féleképpen tehetjük meg.

E-teszt.

- Ha 3 diák vizsgázott és semelyikük sem bukott meg, akkor 729-féle eredmény születhetett. Az értékelés tízfokozatú ($0 = \text{bukás}, 1, 2, \dots, 9$). **Igaz**, mert ha senki sem bukott meg, akkor 9-féle jegyet kaphatnak, és alkalmazható a szorzási szabály:
 $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$.
- Egy bárban 6-féle whisky-t kaphatunk (mindegyikből bőven van). Ha ezekből szeretnénk 4 üveggel vásárolni, akkor ezt 126-féleképpen tehetjük meg. **Igaz**, mert 6-féle termék közül kell 4-et választanunk úgy, hogy választhatjuk ugyanazt többször is, de a sorrend nem számít, azaz ismétléses kombináció számát kell meghatároznunk. Vagy alkalmazzuk közvetlenül a képletet, vagy a korábban már látott „karika-pálcika” módszer szerint számolunk.

$$\frac{((6-1)+4)!}{(6-1)!4!} = \binom{(6-1)+4}{4} = \binom{9}{4} = 126.$$

E-teszt.

- A TJMIH társasjátékban 60 zsetonnal játszunk. A zsetonoknak 10-féle színe van, és egy színen belül 6-féle különböző értékük lehet. Ha 3 zsetont szeretnénk kiválasztani úgy az összes zseton közül, hogy ne legyen mind a 3 zseton azonos színű, akkor ezt $\binom{60}{3} - \binom{54}{3}$ -féleképpen tehetjük meg. **Hamis**, mert először 60 zsetonból 3-at választunk ki, nincs ismétlődés, és nem számít a sorrend: $\binom{60}{3}$. Majd levonjuk a rossz eseteket, azaz azt kell összeszámolni, hogy hányféleképpen lehet 3 azonos színű zsetont húzni. Egy adott színből $\binom{6}{3}$ -féleképpen lehet kiválasztani 3 zsetont, és 10-féle színünk van. Így a rossz esetek száma: $10\binom{6}{3}$. A megoldás: $\binom{60}{3} - 10\binom{6}{3}$.