

Matematika informatikusoknak 1.

Diszkrét matematika I.

Kátai-Urbán Kamilla

4. előadás

Relációk

2.

Osztályozás & Ekvivalenciareláció (Ismétlés)

Definíció.

Legyen A tetszőleges halmaz, és legyen $\mathcal{C} \subseteq P(A)$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{C} \subseteq P(A)$ **osztályozás** az A halmazon vagy más szóval **osztályozása** az A halmaznak, ha a $\mathcal{C}$ -beli halmazok

- (1) nem üresek,
- (2) páronként diszjunktak,
- (3) egyesítésük A (azaz minden elem benne van valamelyik $\mathcal{C}$ -beli halmazban).

Szokás az osztályozást **partíciónak** vagy **faktorhalmaznak** is nevezni. A $\mathcal{C}$ osztályozás elemeit **osztályoknak** nevezzük.

Definíció.

Legyen ϱ reláció az A halmazon. Azt mondjuk, hogy ϱ **ekvivalenciareláció**, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

$$\mathcal{C} \rightsquigarrow \varrho$$

Tétel.

Legyen $\mathcal{C}$ osztályozás az A halmazon. A

$$\varrho_{\mathcal{C}} = \{(a, b) \in A \times A : (\exists X \in \mathcal{C})(a, b \in X)\}$$

reláció ekvivalenciareláció.

Példa.

Legyen A egy iskola tanulóinak halmaza, és $\mathcal{C}$ elemei legyenek az iskola osztályai. Ekkor a $\mathcal{C}$ osztályozás által meghatározott ekvivalenciareláció:

$$\varrho_{\mathcal{C}} = \{(a, b) \in A \times A : a \text{ és } b \text{ osztálytársak, vagy } a = b\}.$$

Példa.

A „Halmazok” előadásban szerepelt, az $A = \{1, 2, 3\}$ halmaz összes osztályozása (partíciója):

$$\mathcal{C}_1 = \{\{1, 2, 3\}\},$$

$$\mathcal{C}_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \quad \mathcal{C}_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \quad \mathcal{C}_4 = \{\{1, 3\}, \{2\}\},$$

$$\mathcal{C}_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

Az osztályozásokhoz tartozó ekvivalenciarelációk:

- $\varrho_{\mathcal{C}_1} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\},$
- $\varrho_{\mathcal{C}_2} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\},$
- $\varrho_{\mathcal{C}_3} = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\},$
- $\varrho_{\mathcal{C}_4} = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (2, 2)\},$
- $\varrho_{\mathcal{C}_5} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}.$

Példa.

A $\mathcal{C} = \{\{0\}, \{-1, 1\}, \{-2, 2\}, \dots\} \subseteq P(\mathbb{Z})$ osztályozáshoz a

$$\begin{aligned}\varrho &= \{(0, 0)\} \cup \{(z, z) : z \in \mathbb{Z}\} \cup \{(z, -z) : z \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |a| = |b|\}\end{aligned}$$

ekvivalenciareláció tartozik.

$$\varrho \rightsquigarrow \mathcal{C}$$

Definíció.

Legyen ϱ ekvivalenciareláció az A halmazon. Az $a \in A$ **elemet tartalmazó osztályon (vagy blokkon)** az $a/\varrho = \{b \in A : (b, a) \in \varrho\}$ halmazt értjük. A ϱ blokkjainak $A/\varrho = \{a/\varrho : a \in A\}$ halmazát az A halmaz ϱ szerinti **faktorhalmazának** vagy ϱ szerinti **osztályozásának** nevezzük.

Példa.

Tekintsük az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ ekvivalenciarelációt. Ekkor $1/\varrho = \{b \in A : (b, 1) \in \varrho\} = \{1, 2\}$. Hasonlóan $2/\varrho = \{1, 2\}$ és $3/\varrho = \{3\}$. Tehát definíció szerint

$$A/\varrho = \{1/\varrho, 2/\varrho, 3/\varrho\} = \{\{1, 2\}, \{1, 2\}, \{3\}\} = \{\{1, 2\}, \{3\}\},$$

ami osztályozása A -nak.

Tétel.

Tetszőleges $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciarelációra A/ϱ osztályozása A -nak.

Példa.

Megadjuk a $\mathbb{Z}$ halmazon értelmezett

$$\varrho = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 3 \mid x - y\}$$

ekvivalenciához tartozó osztályozást.

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/\varrho &= \{\{\dots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \dots\}, \\ &\quad \{\dots, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \dots\}, \\ &\quad \{\dots, -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \dots\}\} \\ &= \{\{3k : k \in \mathbb{Z}\}, \{3k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}, \{3k + 2 : k \in \mathbb{Z}\}\}.\end{aligned}$$

Osztályozás $\rightsquigarrow$ ekvivalenciareláció (feladat)

Feladat.

Adjunk meg az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmazon egy osztályozást, és írjuk fel a hozzá tartozó ekvivalenciarelációt.

Megoldás: ld. előadáson.

Ekvivalenciarelációk és osztályozások kapcsolata

Jelölés

Legyen A tetszőleges halmaz, jelölje $\text{Part}(A)$ az összes az A halmazon értelmezhető osztályozások (más szóval partíciók) halmazát, $\text{Eq}(A)$ pedig az A -n értelmezhető ekvivalenciarelációk halmazát.

Megjegyzés.

Láttuk, hogy az ekvivalenciarelációk osztályozást (faktorhalmazt), az osztályozások (faktorhalmazok) pedig ekvivalenciarelációkat határoznak meg. A következő tétel azt fejezi ki, hogy – a rögzített A halmazon értelmezett – ekvivalenciák és osztályozások lényegében ugyanazok.

Tétel.

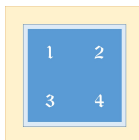
A

- $\varphi: \text{Eq}(A) \rightarrow \text{Part}(A)$, $\varrho \mapsto A/\varrho = \{a/\varrho : a \in A\}$ és
- $\psi: \text{Part}(A) \rightarrow \text{Eq}(A)$, $\mathcal{C} \mapsto \varrho_{\mathcal{C}}$

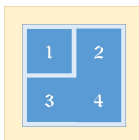
leképezések bijektívek, és egymás inverzei.

Példa.

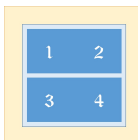
Meghatározzuk, hogy hány ekvivalenciareláció van 4-elemű halmazon. Mivel az ekvivalenciák és az osztályozások között megadható bijekció, valamint 4-elemű halmazon 15 osztályozás van, így ekvivalenciarelációból is 15 van 4-elemű halmazon.



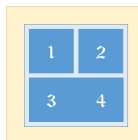
1 db



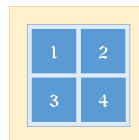
4 db



3 db



6 db



1 db

Megjegyzés.

A fogalmak – nemcsak a matematikában, hanem azon kívül is – gyakran úgy alakulnak ki, hogy veszünk egy $\varrho \subseteq A^2$ ekvivalenciarelációt, és az A/ϱ osztályozás elemeinek nevet adunk.

Például, ha A a sík egyeneseinek halmaza és ϱ a párhuzamossági reláció (amelyik ekvivalenciareláció), akkor egy egyenes ϱ szerinti blokkját szokás az egyenes irányának nevezni.

Részenrendezések és rendezések

Megjegyzés.

A (részben)rendezések a hierarchia fogalmát ragadják meg matematikailag. Ez a fogalom az informatikában is fellép, hiszen pl. a szoftverek is hierarchikus rendbe szervezett kisebb egységekből (szubrutin, modul, eljárás, stb.) épülnek fel.

Definíció.

Az A halmazon értelmezett ϱ reláció **részenrendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív. Ha ϱ részenrendezés az A halmazon, akkor az $(A; \varrho)$ párt **részenrendezett halmaznak** nevezzük.

Definíció.

Az A halmazon értelmezett reláció **rendezés/teljes rendezés/lineáris rendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és dichotóm.

Példa.

- Az $\{1, 2, 3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$ reláció részbenrendezés, de nem rendezés, mert $(2, 3), (3, 2) \notin \varrho$.
- A nemnegatív egészek $\mathbb{N}_0$ halmazán az oszthatósági reláció részbenrendezés, tehát az $(\mathbb{N}_0; |)$ részbenrendezett halmaz. Azonban az oszthatóság nem rendezés ezen a halmazon (ld. előző előadás),
- Az egészek halmazán az oszthatósági reláció nem részbenrendezés, mert nem antiszimmetrikus: $1 \mid -1$ és $-1 \mid 1$.
- Tetszőleges A halmazra a $P(A)$ hatványhalmazon a $\subseteq$ részhalmaz reláció részbenrendezés. A $P(A)$ hatványhalmaz tetszőleges részhalmaza a tartalmazásra nézve részbenrendezett halmaz.
- Tekintsük az összes ekvivalenciarelációk $\text{Eq}(A)$ halmazát A -n:

$$\text{Eq}(A) = \{\varrho \subseteq A \times A : \varrho \text{ ekvivalenciareláció}\}.$$

Ekkor $(\text{Eq}(A); \subseteq)$ részbenrendezett halmaz.

Definíció.

Azt mondjuk, hogy az a és b elemek **összehasonlíthatók** a $\leq$ részbenrendezésben, ha $a \leq b$ vagy $b \leq a$. Tehát egy részbenrendezés pontosan akkor dichotóm, ha bármely két elem összehasonlítható.

Példa.

A 12 egész szám pozitív osztóinak halmazán az oszthatósági reláció részbenrendezésben, a 2 és 3 egészek nem összehasonlítható elemek, míg 2 és 6 összehasonlíthatóak.

Definíció.

Legyen ϱ részbenrendezés az A halmazon. Ha ez nem vezet félreértéshez, akkor $(a, b) \in \varrho$ helyett $a \leq b$ -t írunk, és az $a < b$ jelölést használjuk arra, hogy $a \leq b$ és $a \neq b$. Azt mondjuk, hogy a $b \in A$ elem **fedi** az $a \in A$ elemet, és ezt $a \prec b$ -vel jelöljük, ha $a < b$ és nincs olyan $c \in A$, amelyre $a < c < b$ teljesül.

Példa.

Legyen $\leq = \{(a, b) : a \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ekkor pl. $3 \not\leq 4$, azaz $3 \nmid 4$, valamint pl. $3 \leq 6$, azaz $3 \mid 6$. Az utóbbi esetben $3 < 6$ is teljesül, mivel $3 \leq 6$ és $3 \neq 6$. Pl. 12 nem fedi 3-at ($3 \nprec 12$), mert $3 \leq 12$ és $3 \leq 6 \leq 12$ (azaz $3 \mid 6 \mid 12$ és $3 \neq 6 \neq 12$). Pl. 3-at fedi 9 ($3 \prec 9$), mert $3 \leq 9$ és $3 \leq c \leq 9$ esetén $c \in \{3, 9\}$.

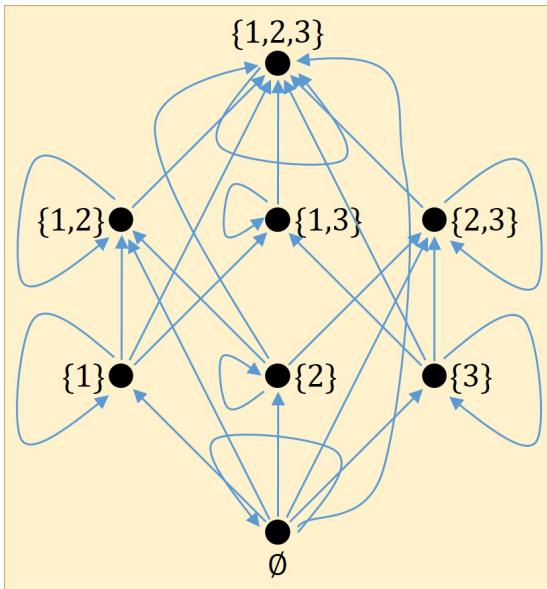
Megjegyzés.

A részbenrendezéseket véges halmazon úgy szemléltethetjük, hogy az elemek közt csak a fedési relációt „rajzoljuk be”, mégpedig úgy, hogy ha $a \prec b$, akkor a -t „lejjebb” rajzoljuk, mint b -t. Ekkor a $d \leq e$ relációt úgy olvashatjuk le a diagramról, hogy van egy felfelé vezető út d -ből e -be néhány közbülső $c_0, c_1, \dots, c_n$ elemen keresztül, azaz

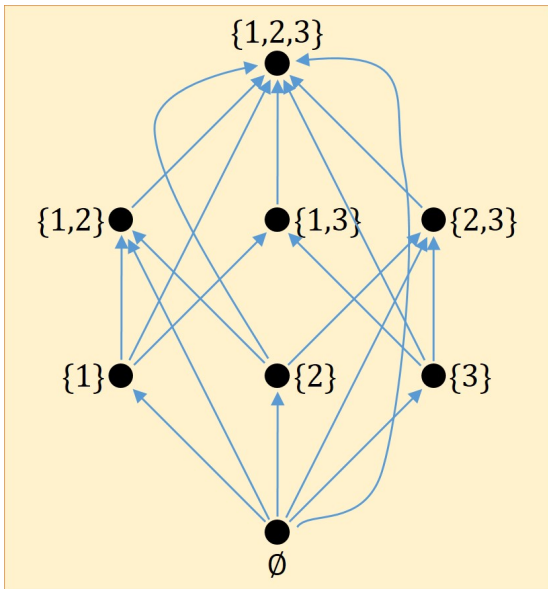
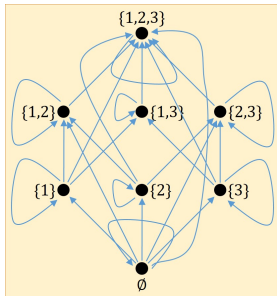
$d = c_0 \prec c_1 \prec \dots \prec c_n = e$. Ezt a diagramot a részbenrendezés

Hasse-diagramjának nevezzük.

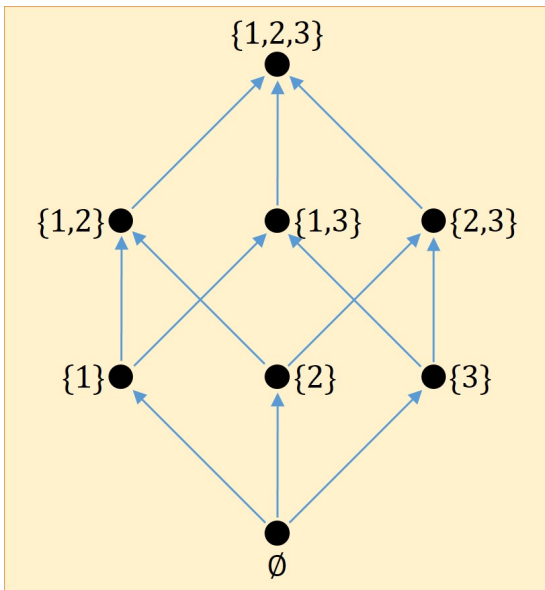
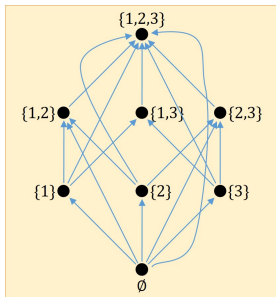
$$(P(\{1, 2, 3\}); \subseteq)$$



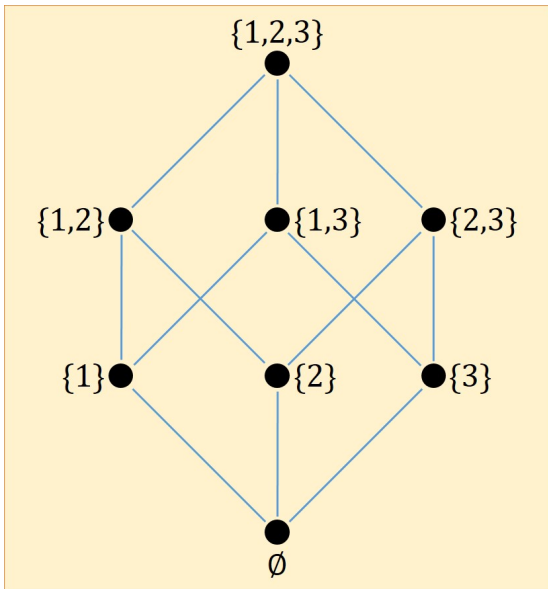
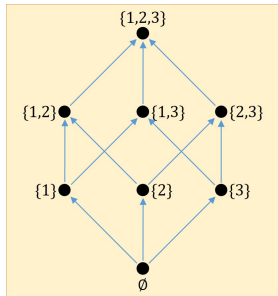
$$(P(\{1, 2, 3\}); \subseteq)$$



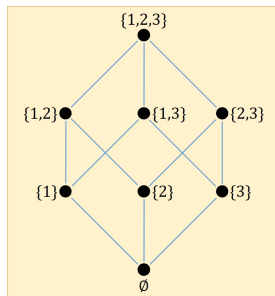
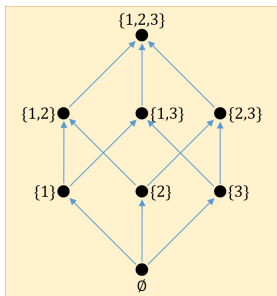
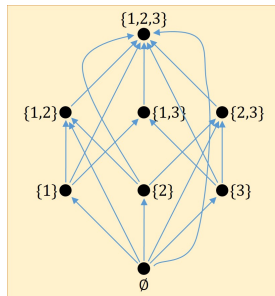
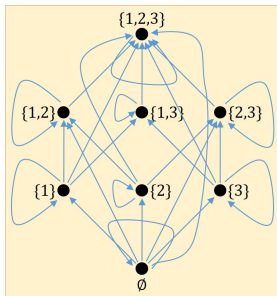
$$(P(\{1, 2, 3\}); \subseteq)$$



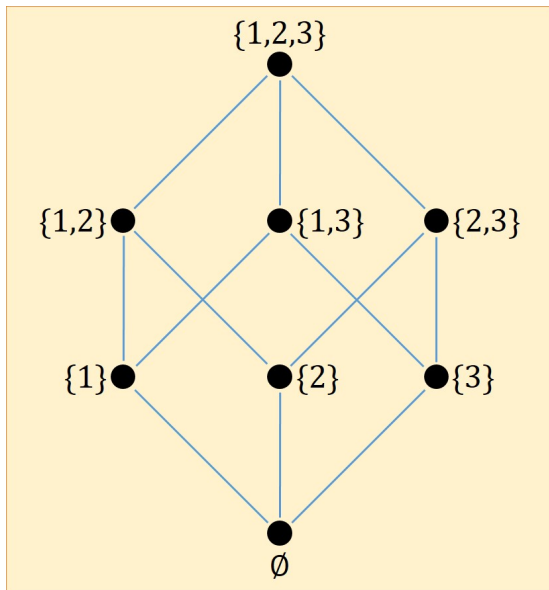
$$(P(\{1, 2, 3\}); \subseteq)$$



$$(P(\{1, 2, 3\}); \subseteq)$$



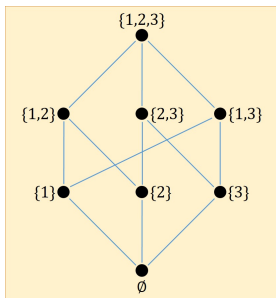
$(P(\{1, 2, 3\}); \subseteq)$



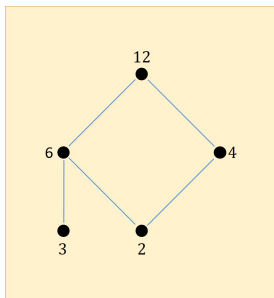
Feladat.

Adjuk meg a $(\{2, 3, 4, 6, 12\}; |)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját.

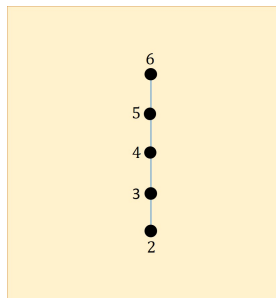
Megoldás: ld. következő dia



$(P(\{1, 2, 3\}); \subseteq)$



$(\{2, 3, 4, 6, 12\}; |)$



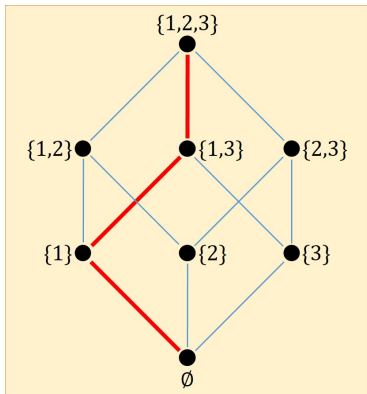
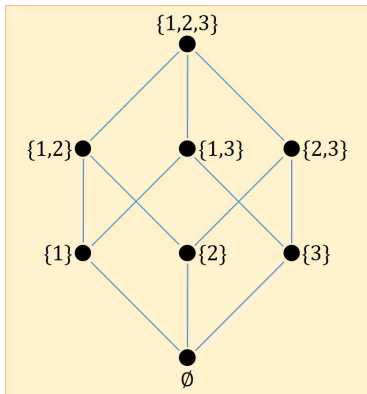
$(\{2, 3, 4, 5, 6\}; \leq)$

Megjegyzés.

Egyazon részbenrendezett halmaz Hasse-diagramja többféleképpen is lerajzolható.

Tétel.

Legyen $\leq$ részbenrendezés az A véges halmazon. Ekkor a fedési reláció (azaz a Hasse-diagram) egyértelműen meghatározza a részbenrendezést.

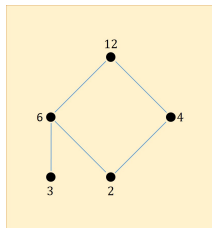
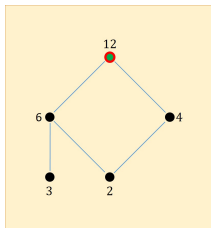
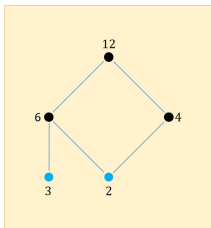
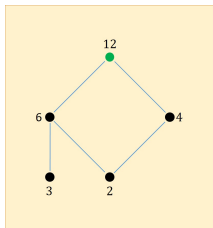


$$(P(\{1, 2, 3\}); \subseteq)$$

Definíció.

Legyen $\leq$ részbenrendezés az A halmazon.

- (a) Az $m \in A$ elem **maximális**, ha nincs olyan $a \in A$, hogy $m < a$.
- (b) Az $m \in A$ elem **minimális**, ha nincs olyan $a \in A$, hogy $a < m$.
- (c) Az $m \in A$ elem **legnagyobb elem**, ha minden $a \in A$ elemre $a \leq m$.
- (d) Az $m \in A$ elem **legkisebb elem**, ha minden $a \in A$ elemre $m \leq a$.



Definíció.

Legyen $\leq$ részbenrendezés az A halmazon.

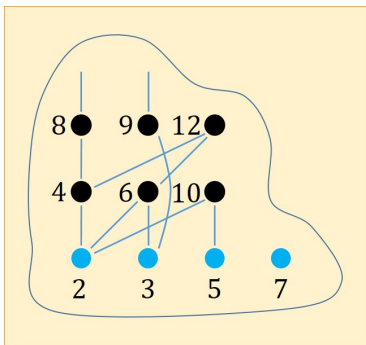
- (a) Az $m \in A$ elem **maximális**, ha nincs olyan $a \in A$, hogy $m < a$.
- (b) Az $m \in A$ elem **minimális**, ha nincs olyan $a \in A$, hogy $a < m$.
- (c) Az $m \in A$ elem **legnagyobb elem**, ha minden $a \in A$ elemre $a \leq m$.
- (d) Az $m \in A$ elem **legkisebb elem**, ha minden $a \in A$ elemre $m \leq a$.

Megjegyzés.

- maximális elem = nincs nála nagyobb
- legnagyobb elem = minden másnál nagyobb
- Egy részbenrendezett halmaznak lehet több maximális és több minimális eleme is, és az is előfordulhat hogy nincs maximális vagy minimális elem.

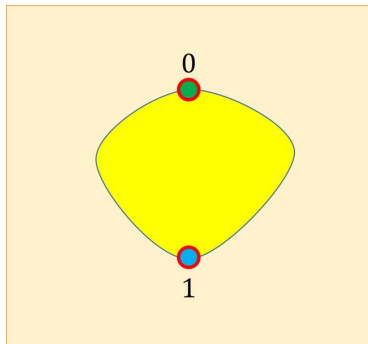
Példa.

Legyen $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2\}$, tekintsük az $(A; |)$ részbenrendezett halmazt. Ennek a részbenrendezett halmaznak nincsen maximális eleme, de végtelen sok minimális eleme van, melyek éppen a prímszámok.



Példa.

Az $(\mathbb{N}_0; |)$ részbenrendezett halmaz esetén az 1 minimális elem és legkisebb elem is, a 0 pedig maximális elem és legnagyobb elem is.



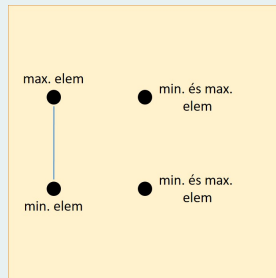
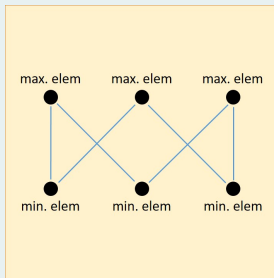
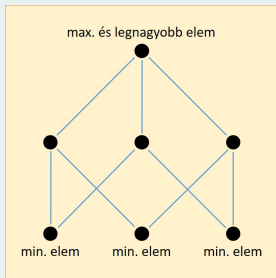
Feladat.

Adjuk meg a $(\{2, 3, 4, 5, 6, 12\}; |)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját. Határozzuk meg a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemeket.

Megoldás: ld. előadáson.

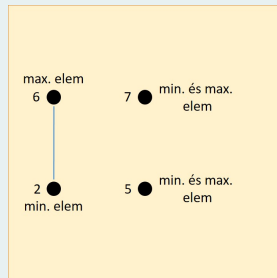
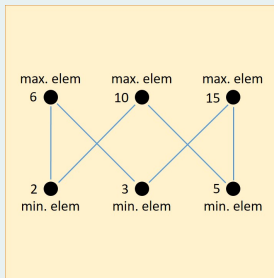
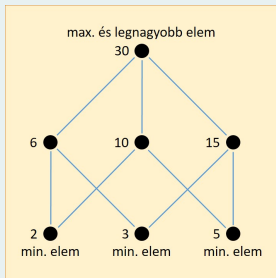
Megjegyzés.

Az oszthatósági reláció esetén megadhatók a természetes számoknak olyan részhalmazai, hogy a következő Hasse-diagramokat kapjuk:



Megjegyzés.

Az oszthatósági reláció esetén megadhatók a természetes számoknak olyan részhalmazai, hogy a következő Hasse-diagramokat kapjuk:



Tétel.

Véges halmazon minden részbenrendezésnek van maximális és minimális eleme.

Tétel.

Egy részbenrendezett halmazban legfeljebb egy legnagyobb és legfeljebb egy legkisebb eleme lehet.

Bizonyítás.

Tfh. m_1 is és m_2 is legnagyobb elem. Ekkor $m_2 \leq m_1$ (mert m_1 legnagyobb elem), $m_1 \leq m_2$ (mert m_2 legnagyobb elem). Az antiszimmetria miatt $m_1 = m_2$.



Tétel.

Részbenrendezett halmaz legkisebb eleme minimális elem is, legnagyobb eleme maximális elem is.

Definíció: részbenrendezett halmazok direkt szorzata.

Legyen adottak az $(A_1; \leq_1)$ és az $(A_2; \leq_2)$ **részbenrendezett** halmazok.

Direkt szorzatukat úgy kapjuk, hogy Descartes-szorzatukon a komponensenkénti részbenrendezést definiáljuk. Azaz a direkt szorzatuk $(A_1 \times A_2; \leq)$, ahol $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ azt jelenti, hogy $a_1 \leq_1 b_1$ és $a_2 \leq_2 b_2$. Megmutatható, hogy ez is részbenrendezett halmaz.

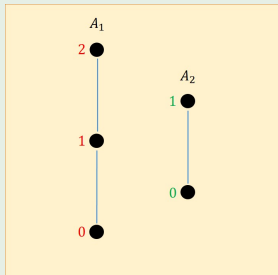
Definíció: részbenrendezett halmazok lexikografikus szorzata.

Az $(A_1; \leq_1)$ és az $(A_2; \leq_2)$ **rendezett** halmazok (tehát nemcsak részbenrendezett) **lexikografikus szorzatán** az $(A_1 \times A_2; \sqsubseteq)$ rendezett halmazt értjük, ahol a $\sqsubseteq$ reláció a **lexikografikus rendezést** jelenti, azaz $(a_1, a_2) \sqsubseteq (b_1, b_2)$ akkor és csak akkor, ha $a_1 <_1 b_1$, vagy $(a_1 = b_1 \text{ és } a_2 \leq_2 b_2)$. Megmutatható, hogy ily módon rendezett halmazt kapunk.

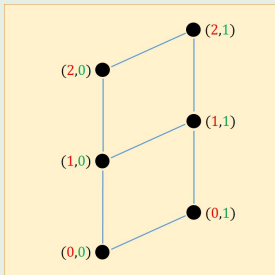
A lexikografikus szorzat onnan kapta a nevét, hogy a lexikonok, szótárak, névsorok is ezen az elven vannak rendezve.

Példa.

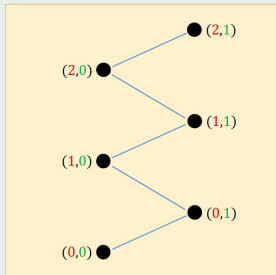
A háromelemű $(\{0, 1, 2\}; \leq)$ és a kételemű $(\{0, 1\}; \leq)$ rendezett halmazok direkt és lexikografikus szorzatának Hasse-diagramjai:



$(A_1; \leq), (A_2; \leq)$



$(A_1 \times A_2; \leq)$



$(A_1 \times A_2; \sqsubseteq)$

A reflexív, a szimmetrikus és a tranzitív lezárt

Tétel.

Legyenek ϱ és σ relációk az A halmazon, valamint $\mathcal{T}$ a reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás tulajdonságok valamelyike. Ha a ϱ és σ relációk $\mathcal{T}$ tulajdonságúak, akkor $\varrho \cap \sigma$ is $\mathcal{T}$ tulajdonságú.

Következmény.

Ekvivalenciarelációk metszete ekvivalenciareláció, és részbenrendezések metszete részbenrendezés.

Definíció.

Legyen $\varrho \subseteq A \times A$ tetszőleges reláció. A ϱ reláció **transzitiv lezártja** alatt azt a legszűkebb ϱ^+ transzitiv relációt értjük, amelyre $\varrho \subseteq \varrho^+$.

Tétel.

Legyen $\varrho \subseteq A \times A$ tetszőleges reláció. Ekkor

$$\varrho^+ = \{(a, b) \in A \times A : (\exists n \in \mathbb{N}_0)(\exists c_1, \dots, c_n \in A)((a, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_n, b) \in \varrho)\}.$$

Példa.

Ha $A = \{1, 2, 3\}$ és $\varrho = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$, akkor

- $(1, 1) \in \varrho^+$, mert $(1, 2), (2, 1) \in \varrho$,
- $(1, 3) \in \varrho^+$, ugyanis $(1, 2), (2, 3) \in \varrho$,
- $(2, 2) \in \varrho^+$, mert $(2, 1)(1, 2) \in \varrho$,

további elemek nem kaphatók meg, tehát

$$\varrho^+ = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}, \text{ és ez a reláció már transzitiv.}$$

Definíció.

Legyen $\varrho \subseteq A \times A$ tetszőleges reláció. A ϱ reláció **reflexív és tranzitív lezártja** alatt azt a legszűkebb ϱ^* reflexív és tranzitív relációt értjük, amelyre $\varrho \subseteq \varrho^*$.

Tétel.

Legyen $\varrho \subseteq A \times A$ tetszőleges reláció, ekkor a $\varrho^* = \varrho^+ \cup \{(a, a) : a \in A\}$ a ϱ reflexív és tranzitív lezártja.

Példa.

Legyen $A = \{1, 2, 3\}$ és $\varrho = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$. Az előző példában láttuk, hogy $\varrho^+ = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$. Így ϱ reflexív és tranzitív lezártja:

$$\begin{aligned}\varrho^* &= \varrho^+ \cup \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \\ &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}.\end{aligned}$$

E-teszt: Számosságok, Relációk (2. fel.)

Az e-tesztek a <http://www.math.u-szeged.hu/~mmaroti/tests/> oldalon érhetők el. A „Számosságok, Relációk” teszt az 5. hét végén indul.

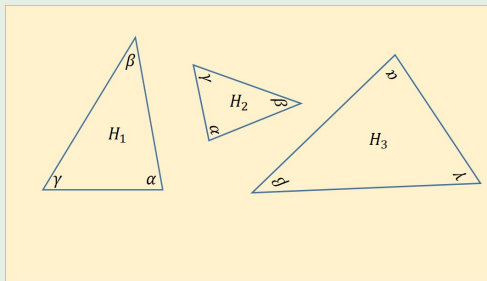
E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek az igazak, illetve melyek hamisak (1 pont jár, ha mind a három válasz helyes).

- A $\{(H_1, H_2) : H_1 \text{ és } H_2 \text{ hasonló}\}$ reláció a síkbeli háromszögek halmazán tranzitív.
- Legyen ϱ_C az $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ alaphalmaz $C = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d, e, f, g\}\}$ osztályozásához tartozó ekvivalenciareláció. Ekkor $(d, g) \in \varrho_C$.
- Tekintsük az $A = \{a, b, c, d\}$ alaphalmazon értelmezett $\varrho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$ ekvivalenciarelációhoz tartozó A/ϱ osztályozást. Ekkor $\{c\} \in A/\varrho$.

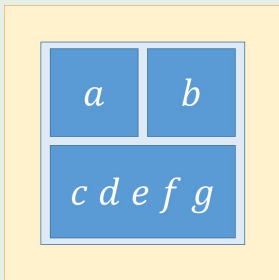
E-teszt.

- A $\{ (H_1, H_2) : H_1 \text{ és } H_2 \text{ hasonló} \}$ reláció a síkbeli háromszögek halmazán tranzitív. **Igaz**, ha H_1 és H_2 hasonló háromszögek (azaz szögeik páronként megegyeznek), és H_2 és H_3 is hasonló, akkor H_1 és H_3 szögei is páronként megegyeznek, tehát hasonló, így a reláció tranzitív.



E-teszt.

- Legyen $\varrho_{\mathcal{C}}$ az $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ alaphalmaz $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d, e, f, g\}\}$ osztályozásához tartozó ekvivalenciareláció. Ekkor $(d, g) \in \varrho_{\mathcal{C}}$. **Igaz**, mivel d és g egy osztályban van, így a $\varrho_{\mathcal{C}}$ definíciója szerint $(d, g) \in \varrho_{\mathcal{C}}$.



E-teszt.

- Tekintsük az $A = \{a, b, c, d\}$ alaphalmazon értelmezett $\varrho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$ ekvivalenciarelációhoz tartozó A/ϱ osztályozást. Ekkor $\{c\} \in A/\varrho$. **Hamis**, a definíció szerint c/ϱ -ban az összes olyan elem szerepel, ami c -vel relációban áll (ϱ szerint), így $c/\varrho = \{c, d\}$, tehát $\{c, d\} \in A/\varrho$. Mivel A/ϱ osztályozás, $\{c\} \notin A/\varrho$.

