

Matematika informatikusoknak 1.

Kátai-Urbán Kamilla

3. előadás

Definíció.

Tetszőleges A, B halmazokra az $A \times B$ halmaz részhalmazait A -ból B -be menő **megfeleltetéseknek** nevezzük. Az A halmaz a megfeleltetés **indulási halmaza**, B pedig az **érkezési halmaza**.

Példa.

Az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazból a $B = \{1, 2, 3, 4\}$ halmazba menő megfeleltetések pontosan a $P(A \times B)$ halmaz elemei, azaz $2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$ darab van belőlük. Például, az $\emptyset$ is megfeleltetés A -ból B -be.

Definíció.

A $\varphi \subseteq A \times B$ megfeleltetést A -ból B -be menő **leképezésnek** nevezünk, ha bármely $a \in A$ -ra **pontosan egy** $b \in B$ létezik, amelyre $(a, b) \in \varphi$.

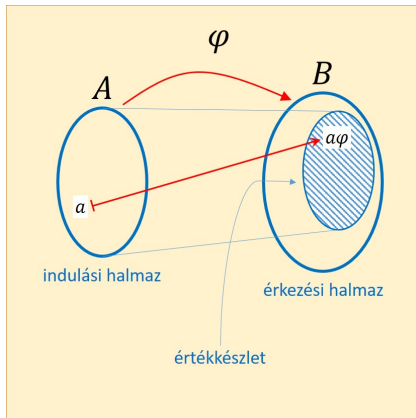
Leképezések esetén a $\varphi \subseteq A \times B$ helyett a $\varphi: A \rightarrow B$ jelölés használjuk. Továbbá $(a, b) \in \varphi$ helyett azt mondjuk, hogy az a elem φ melletti képe b , és azt írjuk, hogy $a\varphi = b$ vagy $a \mapsto b$. Ekkor azt is mondhatjuk, hogy a b elem őse az a .

Példa.

Legyen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, ekkor a $\varphi = \{(1, 4), (2, 3), (3, 4)\} \subseteq A \times B$ megfeleltetés leképezés, általában helyette a $\varphi: A \rightarrow B$, $1\varphi = 4$, $2\varphi = 3$, $3\varphi = 4$ jelölést használjuk. Mivel minden A -beli elem esetén 4 lehetőség közül választhatunk, így A -ból B -be menő leképezésből $4^3 = 64$ darab van. Az $\emptyset$ megfeleltetés NEM leképezés A -ból B -be.

Definíció.

A $\varphi: A \rightarrow B$ leképezés esetén az A indulási halmazt **értelmezési tartománynak** nevezzük. Az $\{a\varphi : a \in A\} \subseteq B$ halmaz neve **értékkészlet**.



Definíció.

A $\varphi: A \rightarrow B$ leképezés **bijektív (bijekció)**, ha B minden elemének pontosan egy őse van, azaz bármely $b \in B$ -re **pontosan egy** $a \in A$ létezik, amelyre $a\varphi = b$.

Megjegyzés.

Nyíldiagramon a bijektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy A minden eleméből pontosan egy nyíl indul ki (ettől leképezés), és B minden elemébe pontosan egy nyíl érkezik.

Példa.

Ha $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, akkor A -ból B -be nem adható meg bijektív leképezés, és B -ből A -ba sem.

Feladat.

Adjunk meg bijektív leképezést az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazból az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazba. Határozzuk meg, hogy hány A -ból A -ba menő bijektív leképezés van.

Megoldás: például $\varphi: A \rightarrow A$, $1\varphi = 2$, $2\varphi = 3$, $3\varphi = 1$.

Mivel bijektív elképezés esetén minden érkezési halmazbeli elemnek pontosan egy őse van, így a kiindulási halmazban különböző elemeknek különböző a képe. Azaz az első elem képét 3-féleképpen választhatjuk meg, a másodikét 2-féleképpen, a harmadik elem képe már csak 1-féle lehet. Tehát az A -ból A -ba menő bijektív leképezések száma $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$.

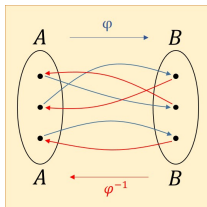
Bijektív leképezések inverze

Definíció.

Legyen $\varphi: A \rightarrow B$ bijektív leképezés, ekkor φ **inverze** az a $\varphi^{-1}: B \rightarrow A$ leképezés, amely tetszőleges $b \in B$ elemhez azt az egyértelműen meghatározott a elemet rendeli, amelyre $a\varphi = b$. Azaz tetszőleges $a \in A$ és $b \in B$ esetén $b\varphi^{-1} = a$ akkor és csak akkor, ha $a\varphi = b$.

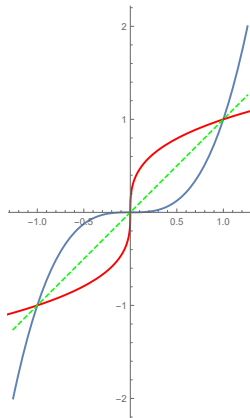
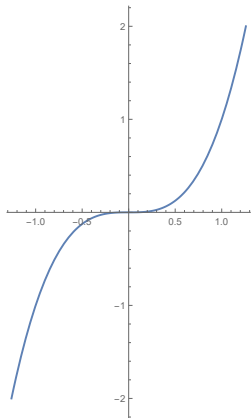
Megjegyzés.

Nyíldiagramon egy bijektív leképezés inverze úgy képzelhető el, hogy „megfordítjuk a nyilakat”.



Példa.

A $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ bijektív leképezés inverze: $\varphi^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{x}$.



Halmazok elemszáma, számossága

Megjegyzés.

A véges halmazok elemeit megszámlálhatjuk. Pl. a balkezünk ujjainak halmaza esetén azt mondjuk, hogy ennek a halmaznak az elemszáma 5. Minden véges halmaznak van egy, és csakis egy jól meghatározott **elemszáma**. Egy halmaz véges, ha elemeit – az $\mathbb{N}_0$ elemeinek felhasználásával – meg tudjuk számolni. Ha egy halmaz nem ilyen, akkor végtelennek mondjuk.

Megjegyzés.

A végtelen halmazok elemeit is meg szeretnénk számolni! Ekkor nem kaphatunk természetes számokat, ezért nem használható az „elemszám” elnevezés. Ehelyett a **számosság** elnevezést fogjuk használni. Tehát a számosság az elemszám megfelelője. Tetszőleges halmaznak lesz számossága, amely véges halmaz esetén persze az elemszámmal fog megegyezni. Más szóval: a véges számosságok pontosan a nemnegatív egész számok lesznek.

Először (annak a fogalomnak kellett kialakulnia), hogy mit jelent az, hogy két halmaznak „ugyanannyi eleme van”. Más szóval, mit jelent az, hogy két halmaz „számossága egyenlő”.

Azonos számosságúnak lenni

Definíció.

Legyen A és B halmaz. Azt mondjuk, hogy az A és B halmazok **számossága egyenlő**, ha létezik $A \rightarrow B$ bijektív leképezés. (Jelölése: $|A| = |B|$.)

Definíció.

A természetes számok halmazának számosságát **megszámlálhatóan végtelennek** nevezzük és $\aleph_0$ -al jelöljük. (Kiejtve „alef null”; $\aleph$ a héber ábécé első betűje.)

Tétel.

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság, azaz minden végtelen halmaznak van olyan részhalmaza, amelynek számossága $\aleph_0$.

Hatványhalmaz számossága

Megjegyzés.

Vajon $\aleph_0$ az egyetlen végtelen számosság, vagy van másik is? Erre a kérdésre az alábbi tétel ad választ. Emlékezzünk vissza arra, hogy $P(A)$ az A halmaz hatványhalmazát (azaz összes részhalmazainak halmazát) jelöli.

Tétel.

Tetszőleges (véges vagy végtelen) halmaz számossága nem egyenlő a hatványhalmazának számosságával. Azaz bármely A halmazra $|A| \neq |P(A)|$.

Tehát nem $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ az egyetlen végtelen számosság, hiszen $P(\mathbb{N})$ eltérő számosságú, és nyilván $P(\mathbb{N})$ is végtelen halmaz (mert már az egyelemű részhalmazai is végtelen sokan vannak).

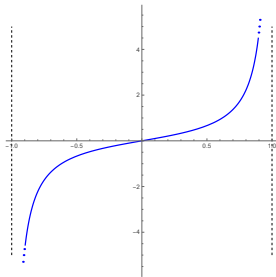
Végtelenek végtelenjei

Tétel.

A valós számok számossága egyenlő az $I = (-1; 1)$ halmaz számosságával.

Bizonyítás.

A $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ leképezés bijektív.



Tétel.

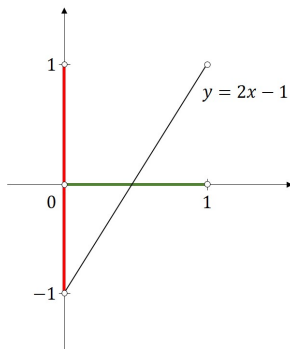
Az $I = (-1; 1)$ intervallum számossága megegyezik a $J = (0; 1)$ intervallum számosságával.

Bizonyítás.

A $J \rightarrow I$, $x \mapsto 2x - 1$ leképezés bijektív. $\diamond$

Következmény.

$|\mathbb{R}| = |(0; 1)|$, azaz pontosan annyi valós szám van, mint amennyi valós szám van a $(0; 1)$ intervallumban.



Állítás.

Legyenek a és b valós számok úgy, hogy $a < b$. Ekkor

$$|(a; b)| = |(0; 1)|,$$

ahol $(a; b) = \{r \in \mathbb{R} : a < r < b\}$.

Bizonyítás.

Bijektív leképezést adunk meg a $(0; 1)$ és $(a; b)$ intervallumok között:

$$(0; 1) \rightarrow (a; b), \quad x \mapsto (b - a)x + a.$$

A Cantor-féle átlós módszer

Tétel (Cantor).

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|.$$

Megjegyzés.

Mivel $|\mathbb{R}| = |(0; 1)|$, ezért elegendő azt igazolni, hogy

$$|\mathbb{N}| \neq |J|,$$

ahol $J = (0; 1)$.

A tételt indirekt módon bizonyítjuk. Az indirekt bizonyítás a matematikai bizonyítások fontos típusa. Lényege: a bizonyítandó állítást tagadjuk. (Ez az indirekt feltevés.) Ezután az indirekt feltevésből ellentmondást vezetünk le. A kapott ellentmondásból következtetünk a bizonyítandó állításra.

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy $|\mathbb{N}| = |J|$, ahol $J = (0; 1)$. Ekkor létezik $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow J$ bijekció. Legyen $n\varphi = r_n \in J$ ($n \in \mathbb{N}$).

$r_1: 0,2078795 \dots$

$r_2: 0,6931471 \dots$

$r_3: 0,7041067 \dots$

$r_4: 0,7853981 \dots$

$r_5: 0,3678794 \dots$

$r_6: 0,6449340 \dots$

$r_7: 0,6180339 \dots$

$\vdots$

Bizonyítás. (folyt.)

$$\begin{aligned}r_1 &: 0,2078795 \dots \\r_2 &: 0,6931471 \dots \\r_3 &: 0,7041067 \dots \\r_4 &: 0,7853981 \dots \\r_5 &: 0,3678794 \dots \\r_6 &: 0,6449340 \dots \\r_7 &: 0,6180339 \dots \\&\vdots\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}r_1 &: 0,2078795 \dots \\r_2 &: 0,6931471 \dots \\r_3 &: 0,7041067 \dots \\r_4 &: 0,7853981 \dots \\r_5 &: 0,3678794 \dots \\r_6 &: 0,6449340 \dots \\r_7 &: 0,6180339 \dots \\&\vdots \\b &: 0,4454454 \dots\end{aligned}$$

Definiáljuk a $b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots \in J$ valós számot az alábbi módon: ha az $r_i = i\varphi$ valós számban az i -edik tizedesjegy 4, akkor legyen $b_i = 5$, ellenkező esetben pedig legyen $b_i = 4$. Ha b őse n , akkor $b = n\varphi = r_n$ teljesülne, ami nem lehetséges, mivel b és r_n n -edik tizedesjegye különböző. Ellentmondásra jutottunk. $\diamond$

Definíció.

Legyenek A és B halmazok. Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága kisebb vagy egyenlő**, mint a B halmaz számossága, (jel.: $|A| \leq |B|$), ha létezik olyan bijektív $A \rightarrow C$ leképezés, ahol $C \subseteq B$.

Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága kisebb**, mint a B halmaz számossága (jel.: $|A| < |B|$), ha $|A| \leq |B|$ és $|A| \neq |B|$ (azaz létezik olyan bijektív $A \rightarrow C$ leképezés, ahol $C \subseteq B$, de nem létezik $A \rightarrow B$ bijektív leképezés).

Példa.

- Legyen $A = \{1, 2, 3\}$ és $B = \{1, 2, 3, 4\}$, ekkor $|A| < |B|$, hiszen nem létezik bijekció A és B között, de a

$$A \rightarrow A, \quad 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 2, \quad 3 \mapsto 3$$

leképezés bijektív, és $A \subseteq B$.

- Tetszőleges A halmazra $|A| < |P(A)|$, ugyanis korábbi tétel alapján nincs bijekció a két halmaz között, és ha tekintjük a $B = \{\{a\} : a \in A\} \subseteq P(A)$ halmazt, akkor az $A \rightarrow B, a \mapsto \{a\}$ leképezés bijektív.
- $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$, hiszen már láttuk, hogy $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, továbbá $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, és az $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n$ leképezés bijektív.

Definíció.

Az A halmaz **véges**, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}_0$, hogy $|A| = n$. Az A halmaz **megszámlálhatóan végtelen**, ha $|A| = |\mathbb{N}|$, ekkor azt írjuk, hogy $|A| = \aleph_0$. Az A halmaz **megszámlálható**, ha A véges vagy megszámlálhatóan végtelen. Az A halmaz **kontinuum számosságú**, ha $|A| = |\mathbb{R}|$, ekkor azt írjuk, hogy $|A| = \mathfrak{c}$.

Tétel.

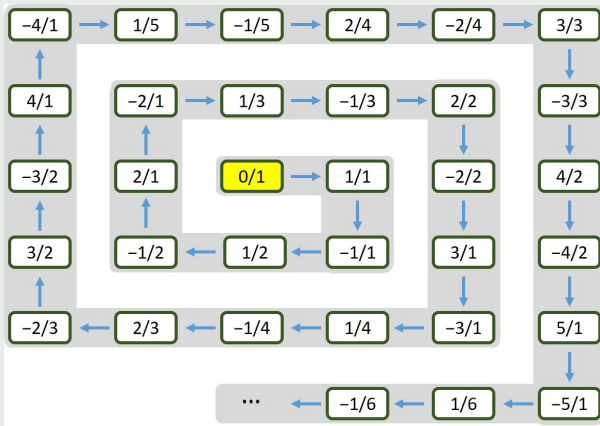
Tetszőleges A halmaz esetén akkor és csak akkor teljesül, hogy $|A| = \aleph_0$, ha A végtelen, és sorozatba rendezhető, azaz megadható olyan, az $\mathbb{N}$ elemeivel indexelt $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ sorozat, amely A minden egyes elemét tartalmazza (esetleg többször is).

Példa.

Az egész számok halmaza megszámlálhatóan végtelen, azaz $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$, mivel végtelen és a $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots$ sorozat minden elemét tartalmazza.

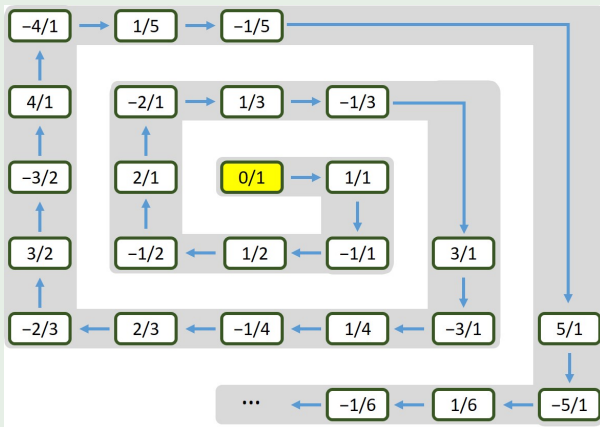
Példa.

A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen, azaz $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, mert végtelen, és a nyilak mentén sorozatba rendezhető.



Példa.

A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen, azaz $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, mert végtelen, és a nyilak mentén sorozatba rendezhető.



Számosságáritmetika Alaptétele.

Legyenek A és B halmazok úgy, hogy legalább az egyik végtelen (és a másik nem üres). Ekkor $|A \cup B| = |A \times B| = \max(|A|, |B|)$.

Tétel.

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0.$$

Tétel.

$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |P(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}.$$

Bizonyítás.

A Számosságáritmetika Alaptételét felhasználva

$$\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| = |(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Z}| = \max(|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}|, |\mathbb{Z}|),$$

adódik, de $|\mathbb{Z}| = \aleph_0 < \mathfrak{c}$, így $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}| = \mathfrak{c}$.



Relációk

Halmazelmélet

Relációk: megadásuk és szemléltetésük

Definíció: Reláció.

Tekintsük az A és B halmazokat. Azokat a $\varrho \subseteq A \times B$ megfeleltetéseket, ahol $A = B$ **relációknak** nevezzük.

Megjegyzés.

A relációk lényegében ugyanazok, mint a kétváltozós predikátumok, hiszen az egyik a másikat meghatározza. (Tehát csak más felfogásban, más jelölésrendszerben beszélünk ugyanarról.)

Példa.

- Relációként:

$$\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : m < n\}$$

- Predikátumként:

$$\mathbb{N}^2 \rightarrow \{i, h\}, (m, n) \mapsto \begin{cases} i, & \text{ha } m < n, \\ h, & \text{különben.} \end{cases}$$

Pontosan azokból az elempárokból áll a reláció, ahol a predikátum értéke i .

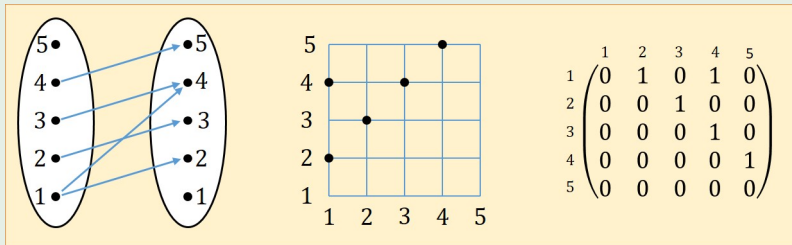
Megjegyzés.

A $\varrho \subseteq A \times A$ relációt szemléltethetjük

- **nyíldiagrammal**: az $(a, b) \in \varrho$ párt az a pontból a b pontba irányított nyíllal ábrázoljuk,
- **koordinátarendszerben**: az $(A \times A)$ Descartes-szorzatot ábrázoljuk koordinátarendszerben, és megjelöljük a ϱ részhalmazba tartozó elemeket,
- **mátrixszal**: ha $|A| = n$, akkor A elemeit megszámozzuk, és aszerint írunk 1-et, illetve 0-t a mátrix (azaz számtáblázat) i -edik sorának j -edik helyére, hogy (i, j) benne van-e vagy nincs benne a relációban. (Informatikában gyakran használják ezt a módszert, a relációkat a bitmátrixukkal adják meg.)

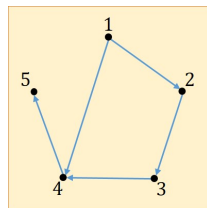
Példa.

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $\varrho = \{(a, b) \in A \times A : a + 1 \text{ osztója } b\text{-nek}\}$.



Megjegyzés.

A nyíldiagram helyett gráffal is szemléltethetjük a relációkat, ha az A halmazon belül húzzuk be az éleket.



Megjegyzés.

Tetszőleges $\varrho \subseteq A \times A$ reláció esetén $(a, b) \in \varrho$ helyett az $a\varrho b$ jelölést is alkalmazhatjuk. Általában ez jellemző a jól ismert relációkra: pl. $2 \leq 3$ -t írunk $(2, 3) \in \leq$ helyett.

Megjegyzés.

Mivel bármely $\alpha, \beta \subseteq A \times A$ relációk egyben halmazok is, ezért relációkon is elvégezhetők a halmazműveletek.

Példa.

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, és

$$\alpha = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (5, 6)\} \subseteq A^2,$$

$$\beta = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 4), (5, 5)\} \subseteq A^2.$$

- $\alpha \cap \beta = \{(1, 3), (3, 4)\},$
- $\alpha \cup \beta = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 5), (5, 6)\},$
- $\alpha \setminus \beta = \{(1, 1), (2, 3), (5, 6)\},$
- $\alpha \triangle \beta = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (5, 5), (5, 6)\}.$

Példa.

Jelölje E az emberek halmazát, és legyenek

$$\gamma = \{(x, y) : x \text{ anyja } y\} \subseteq E \times E,$$

$$\delta = \{(x, y) : x \text{ apja } y\} \subseteq E \times E$$

relációk az E halmazon. Ekkor

$$\gamma \cap \delta = \{(x, y) : x \text{ anyja és apja } y\} = \emptyset \subseteq E^2,$$

$$\gamma \cup \delta = \{(x, y) : x \text{ anyja vagy apja } y\} = \{(x, y) : x \text{ szülője } y\} \subseteq E^2.$$

Definíció.

Tetszőleges $\varrho \subseteq A \times A$ relációra definiáljuk annak **inverzét**:

$$\varrho^{-1} = \{(x, y) \in A \times A : (y, x) \in \varrho\}.$$

Vegyük észre, hogy $(\varrho^{-1})^{-1} = \varrho$.

Példa.

(a) Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, és $\alpha = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (5, 6)\}$ reláció az A halmazon.

$$\alpha^{-1} = \{(1, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 3), (6, 5)\}.$$

(b) Jelölje E az emberek halmazát, és $\gamma = \{(x, y) : x \text{ anyja } y\}$.

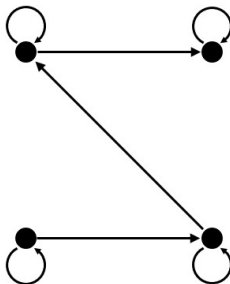
$$\gamma^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \gamma\} = \{(x, y) : y \text{ anyja } x\}.$$

Definíció.

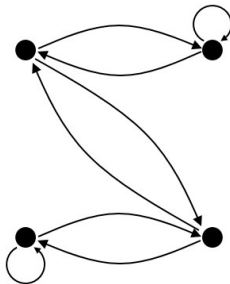
Azt mondjuk, hogy az $\alpha \subseteq A \times A$ reláció

- **reflexív**, ha bármely $x \in A$ elemre $(x, x) \in \alpha$ teljesül,
- **szimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$ elemekre, ha $(x, y) \in \alpha$, akkor $(y, x) \in \alpha$,
- **antiszimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$ elemekre, ha $(x, y) \in \alpha$ és $(y, x) \in \alpha$, akkor $x = y$,
- **transzitiv**, ha bármely $x, y, z \in A$ elemekre, ha $(x, y) \in \alpha$ és $(y, z) \in \alpha$, akkor $(x, z) \in \alpha$,
- **dichotóm**, ha bármely $x, y \in A$ elemekre $(x, y) \in \alpha$ vagy $(y, x) \in \alpha$.

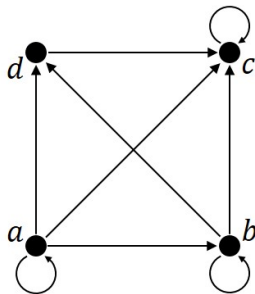
Relációtulajdonságok gráffal



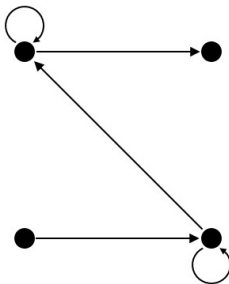
reflexív reláció = a reláció gráfjának minden csúcsában hurokél van



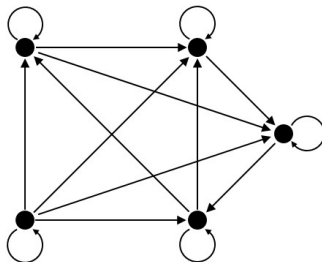
szimmetrikus reláció = a reláció gráfjának két pontja között
van az egyik irányban él,
akkor van a másik irányban is



transzitiv reláció = a reláció gráfjának bármely két csúcsára, ha az egyikből irányított élek mentén el tudunk jutni a másikba, akkor egyetlen irányított él mentén is eljuthatunk (pl. az $a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow c$ útvonal miatt $a \rightarrow c$ él is kell legyen)



antiszimmetrikus reláció = a reláció grájában különböző csúcsok között legfeljebb egy irányban megy él



dichotóm reláció = a reláció grájában bármely két csúcs között legalább egy irányított él megy

Minden dichotóm reláció egyúttal reflexív is (hiszen a „bármely két csúcs” egybe is eshet).

Ekvivalenciareláció, részbenrendezés, rendezés

Definíció: ekvivalenciareláció.

Egy reláció esetén azt mondjuk, hogy **ekvivalenciareláció**, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Definíció: részbenrendezés.

Egy reláció esetén azt mondjuk, hogy **részbenrendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.

Definíció: rendezés.

Egy reláció esetén azt mondjuk, hogy **rendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és dichotóm.

Példa.

Megvizsgáljuk, hogy a tanultak közül mely relációtulajdonsággal rendelkeznek az alábbi relációk:

- $\alpha = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a + b = 2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$
- $\beta = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N},$
- $\gamma = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a \leq b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$
- $\varrho = \{(X, Y) \in P(A) \times P(A) : X \subseteq Y\} \subseteq P(A) \times P(A),$ ahol A halmaz és $|A| \geq 2,$
- $\mu = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : |a| = |b|\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$

A tulajdonságok vizsgálata után eldöntjük, hogy a reláció ekvivalenciareláció, részbenrendezés vagy rendezés-e.

Az α reláció tulajdonságai

Példa. (folyt.)

$$\alpha = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a + b = 2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

- Reflexivitás: Pl. $3 + 3 \neq 2$, így $(3, 3) \notin \alpha$, tehát α NEM reflexív.
- Szimmetria: IGEN, hiszen ha $a + b = 2$, akkor $b + a = 2$ (mert az összeadás kommutatív).
- Antiszimmetria: Igaz-e, hogy ha $a + b = 2$ és $b + a = 2$, akkor szükségképpen $a = b$? NEM, pl. $a = -1$, $b = 3$ ellenpélda.
- Transzitivitás: Igaz-e, hogy ha $a + b = 2$ és $b + c = 2$, akkor $a + c = 2$? NEM, hiszen pl. $a = c = 0$, $b = 2$ esetén sem teljesül.
- Dichotómia: Az α reláció NEM dichotóm, mivel pl. $(3, 4) \notin \alpha$ és $(4, 3) \notin \alpha$.

Tehát α NEM ekvivalenciareláció, NEM részbenrendezés és NEM rendezés.

A β reláció tulajdonságai

Példa. (folyt.)

$\beta = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ez az ún. **oszthatósági reláció** $\mathbb{N}$ -en.

- Reflexív, mivel minden szám osztható önmagával.
- NEM szimmetrikus, hiszen pl. $2 \mid 6$, de a 6 nem osztója a 2-nek.
- Antiszimmetrikus, hiszen ha két pozitív egész szám egymásnak kölcsönösen osztója, akkor egyenlőek.
- Transitív is, ha a osztója b -nek és b osztója c -nek, akkor a osztója c -nek: csakugyan, ha alkalmas x, y pozitív egész számokra $b = xa$ és $c = yb$, akkor $c = yxa$, azaz $a \mid c$.
- NEM dichotóm, hiszen pl. a 3 és az 5 számokat tekintve, egyik sem osztója a másiknak.

Tehát β részbenrendezés, de NEM rendezés és NEM ekvivalenciareláció.

Példa. (folyt.)

- $\gamma = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a \leq b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív, dichotóm, tehát rendezés és részbenrendezés is. Azonban nem szimmetrikus, ezért nem ekvivalencia.
- $\varrho = \{(X, Y) \in P(A) \times P(A) : X \subseteq Y\} \subseteq P(A) \times P(A)$, ahol A halmaz és $|A| \geq 2$: reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, tehát részbenrendezés. Mivel $|A| \geq 2$, nem dichotóm. Ezért nem rendezés. Nem szimmetrikus, ezért nem ekvivalenciareláció.

A μ reláció tulajdonságai

Példa. (folyt.)

$\mu = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : |a| = |b|\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: reflexív, szimmetrikus, tranzitív, tehát ekvivalenciareláció. Nem dichotóm (pl. $(1, 2), (2, 1) \notin \mu$) és nem antiszimmetrikus (pl. $(1, -1), (-1, 1) \in \mu$, de $1 \neq -1$). Ezért nem részbenrendezés, és akkor persze nem rendezés.

Relációtulajdonságok, műveletek

Megjegyzés.

Ha egy reláció dichotóm, akkor reflexív. Másképpen fogalmazva: Ha nem reflexív a reláció, akkor nem is dichotóm.

Megjegyzés.

Van olyan reláció, ami szimmetrikus és antiszimmetrikus:

$$\{(1, 1), (2, 2)\} \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}.$$

Tétel.

Tetszőleges $\alpha \subseteq A^2$ reláció pontosan akkor szimmetrikus, ha $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$.

E-teszt: Számosságok, Relációk (1. fel.)

Az első két elektronikus teszt már kitölthető. A "Számosságok, Relációk" teszt az 5. hét végén indul.

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek az igazak, illetve hamisak (1 pont jár, ha mind a három válasz helyes).

- Az $\{1, 2\}$ halmazról az $\{1, 2\}$ halmazba 2 leképezés létezik. **Hamis.** Leképezés esetén a kiindulási halmaz minden elemének pontosan egy képe van. Tehát az 1-nek is kétféle képe lehet, és a 2-nek is, azaz 4 leképezés létezik. Ezek közül 2 bijektív, de a feladat az összes leképezés számát kérdezte.
- Létezik $\mathbb{Q}^7 \rightarrow \mathbb{R}$ bijektív leképezés. **Hamis,** mert $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, és a Számosságaritmetika Alaptételét felhasználva $|\mathbb{Q}^7| = \aleph_0$, de $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c} > \aleph_0 = |\mathbb{Q}^7|$. Tehát nem létezik bijektív leképezés.
- $|(1; 4)| = |(1; 2)|$. **Igaz,** mert egy korábbi tétel szerint tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$ esetén $|(a; b)| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.