

Matematika informatikusoknak 1.

Kátai-Urbán Kamilla

2. előadás

Predikátumkalkulus

Matematikai logika

Példa.

Minden egész számhoz van olyan racionális szám, amelynek négyzetgyöke nagyobb a kiindulási egész számnál.

Az ítéletkalkulus nem elegendő bonyolultabb kijelentések részletes formalizálására, ezért az ítéletkalkulust ki kell bővíteni.

- Kvantorok:
 - **univerzális kvantor**: „bármely, minden, összes, tetszőleges”, jele: $\forall$
 - **egzisztenciális kvantor**: „van olyan, létezik, található”, jele: $\exists$
- **Függvényjelek**, például a „négyzetgyök”.
- **Predikátumjelek**, például a „nagyobb”.

Definíció.

Predikátumnak nevezzük az olyan kifejezést, amelybe alkalmas objektumokat behelyettesítve ítéletet kapunk.

Példa.

Formalizáljuk a következő ítéletet:

Minden páros szám osztható 2-vel.

A következő predikátumokat vezetjük be:

- $P(x)$: x páros szám.
- $O(x, y)$: x osztója y -nak.

A keresett formula:

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow O(2, x)).$$

Megjegyzés.

A kvantorokat zárójelbe kell tenni, és a hatókörét is zárójel jelöli. A kvantor mindig az őt követő legrövidebb részformulára vonatkozik.

(Vö.: $(\forall x)P(x) \rightarrow O(2, x)$ vs $(\forall x)(P(x) \rightarrow O(2, x)).$)

Példa.

A korábbi példában megadott $(\forall x)(P(x) \rightarrow O(2, x))$ formulában az x individuumváltozó. Az individuumtartomány (azaz x lehetséges értékeinek halmaza), az egész számok halmaza. A 2 individuumkonstans (az individuumtartomány eleme).

Definíció: individuumváltozó, -tartomány, -konstans.

A predikátumok változóit **individuumváltozóknak**, a behelyettesíthető objektumok nemüres összességét **individuumtartománynak** nevezzük. Az individuumtartomány egy elemét **individuumkonstansnak** nevezzük. A predikátumokat az ítéletekhez hasonlóan nagy betűkkel jelöljük, de zárójelben feltüntetjük az individuumváltozóit. Az ítéleteket nullváltozós predikátumoknak tekintjük.

Definíció: függvény.

Függvénynek nevezzük az olyan kifejezést, amelybe az individuumtartomány elemeit behelyettesítve szintén az individuumtartomány elemét kapjuk. Az **individuumkonstansok** 0-változós függvényeknek tekinthetők. A függvényeket kis betűkkel jelöljük.

Példa.

Az individuumtartomány legyen az egész számok halmaza, és vezessük be a következő predikátumokat és függvényeket:

- $O(x, y)$: x osztója y -nak, $E(x, y)$: x egyenlő y -nal,
- $f(x, y)$: x és y szorzata.

Döntsük el, hogy igaz-e az alábbi állítás:

$$(\forall x)(\forall y)(E(f(x, 2), y) \rightarrow O(x, y)).$$

Az állítás igaz, mivel minden x, y egész számra teljesül az oszthatóság definíciója miatt a következő: ha $x \cdot 2 = y$, akkor x osztója y -nak.

Definíció.

Rögzítsük a függvényjelek $\mathcal{F}$ halmazát, illetve ezen jelek változóinak számát. Ekkor a predikátumkalkulus (elsőrendű nyelv) **kifejezései** a következők:

- (k_1) az individuumváltozók mindegyike kifejezés,
- (k_2) ha $t_1, \dots, t_n$ kifejezések és $f \in \mathcal{F}$ n -változós függvényjel, akkor $f(t_1, \dots, t_n)$ is kifejezés, és
- (k_3) minden kifejezés (k_1) és (k_2) véges számú alkalmazásával kapható meg.

Példa.

Az előző példában szereplő formula részkifejezései az x , y individuumváltozók, és a 2 , illetve $f(x, 2)$ függvények, melyek 0- illetve 2-változósak.

Definíció.

Rögzítsük a függvényjelek $\mathcal{F}$ és a predikátumjelek $\mathcal{P}$ (nemüres) halmazát, illetve ezen jelek változóinak számát. A predikátumkalkulus (elsőrendű nyelv) **formulái** a következők:

- (p₁) ha $t_1, \dots, t_n$ kifejezések és $P \in \mathcal{P}$ n -változós predikátumjel, akkor $P(t_1, \dots, t_n)$ **prímformula vagy atomi formula**,
- (p₂) ha F és G formulák, valamint x individuumváltozó, akkor $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $((\forall x)F)$, $((\exists x)F)$ mindegyike **összetett formula**, és
- (p₃) minden formula (p₁) és (p₂) véges számú alkalmazásával kapható meg.

Példa.

A korábbi formulában prímformulák: $E(f(x, 2), y)$ és az $O(x, y)$, összetett formulák: pl. $(E(f(x, 2), y) \rightarrow O(x, y))$, és $(\forall y)(E(f(x, 2), y) \rightarrow O(x, y))$.

Definíció.

A formulák felépítése során fellépő $(\forall x)F$ és $(\exists x)F$ alakú részformuláknál F -et a **kvantor hatókörének** hívjuk. Ekkor az x individuumváltozó F -beli előfordulásait **kötöttnek** nevezzük, minden nem kötött előfordulást **szabadnak** nevezünk. Egy **formula szabad változói** alatt a szabadon előforduló változóinak halmazát értjük. Egy formula **zárt**, ha nincs szabad változója.

Példa.

Legyen $\mathcal{P} = \{P\}$ és $\mathcal{F} = \{f\}$, ahol P kétváltozós és f egyváltozós. Tekintsük a következő formulában a kvantorok hatókörét:

$$\begin{array}{c} (\exists x) (\forall y) ((\forall z) \underbrace{P(f(x), z)}_{\forall z \text{ hatóköre}} \wedge P(f(z), y)) \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\forall y \text{ hatóköre}} \\ \underbrace{\hspace{15em}}_{\exists x \text{ hatóköre}} \end{array}$$

Példa.

Tehát a $(\exists x)(\forall y)((\forall z)P(f(x), z) \wedge P(f(z), y))$ formulában az x és az y változók kötötten fordulnak elő, a z változónak pedig van kötött és szabad előfordulása is, tehát a formula nem zárt. A z változó kötött előfordulására úgy gondolunk, mintha az teljesen különböző lenne a szabad előfordulástól, és a változó átnevezésével ez egyértelművé is tehető:

$$(\exists x)(\forall y)((\forall t)P(f(x), t) \wedge P(f(z), y)).$$

Megjegyzés.

Ha megadjuk az individuumtartományt, a predikátumjeleknek és függvényjeleknek a jelentését, azt **interpretációnak** nevezzük.

Definíció.

Azt mondjuk, hogy az F és G formulák **logikailag ekvivalensek**, és azt írjuk, hogy $F \equiv G$, ha tetszőleges individuumentartományon tetszőlegesen megválasztva a függvényjelek és predikátumjelek interpretációját, az F és G formulák logikai értéke a szabad változók tetszőleges behelyettesítése mellett megegyezik. Egy F formulát **tautológiának** hívunk, ha tetszőleges interpretáció esetén igaz.

Tétel.

Legyen F tetszőleges formula, ekkor érvényesek a

$$(\forall x)(\forall y)F \equiv (\forall y)(\forall x)F, \quad (\exists x)(\exists y)F \equiv (\exists y)(\exists x)F,$$

$$\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)\neg F, \quad \neg(\exists x)F \equiv (\forall x)\neg F,$$

$$(\forall x)(F \wedge G) \equiv (\forall x)F \wedge (\forall x)G, \quad (\exists x)(F \vee G) \equiv (\exists x)F \vee (\exists x)G.$$

logikai ekvivalenciák.

Példa.

Legyen az individuumtartomány az emberek halmaza, és formalizáljuk a következő mondatot:

Mindenki szereti az anyja főztjét.

- $S(x, y)$: x szereti y főztjét (S 2-változós predikátumjel),
- $a(x)$: x anyja (a 1-változós függvényjel).

$$(\forall x)S(x, a(x)).$$

Tagadjuk a formulát:

$$\neg(\forall x)S(x, a(x)) \equiv (\exists x)\neg S(x, a(x)).$$

Van olyan, aki nem szereti az anyja főztjét.

Tétel.

Ha két, egymással logikailag ekvivalens, ítéletkalkulusbeli (!) formula ítéletváltozóit tetszőleges predikátumkalkulusbeli formulákkal helyettesítjük, akkor logikailag ekvivalens formulákat kapunk.

Példa.

Az ítéletkalkulusbeli ekvivalencia legyen: $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$. Ha A -t $(P(x, y) \vee Q(x))$ -szel B -t pedig $R(x)$ -szel helyettesítjük, akkor a

$$(P(x, y) \vee Q(x)) \rightarrow R(x) \equiv \neg(P(x, y) \vee Q(x)) \vee R(x)$$

ekvivalenciát kapjuk.

Tétel.

Ha egy formula részformuláját egy vele logikailag ekvivalens formulával kicseréljük, akkor az eredetivel logikailag ekvivalens formulát kapunk.

Példa.

$$\begin{aligned} & (\forall x)(\exists y)((P(x, y) \vee Q(x)) \rightarrow R(x)) \\ & \equiv (\forall x)(\exists y)(\neg(P(x, y) \vee Q(x)) \vee R(x)). \end{aligned}$$

$$(A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B)$$

Példa.

Korábban formalizáltuk a

Minden páros szám osztható 2-vel.

ítéletet, a kapott formula: $(\forall x)(P(x) \rightarrow O(2, x))$.

Az előző tételek felhasználásával megadjuk a formula **tagadását** úgy, hogy negáció legfeljebb csak prímformulára vonatkozzon.

$$\begin{aligned}\neg(\forall x)(P(x) \rightarrow O(2, x)) &\equiv (\exists x)\neg(P(x) \rightarrow O(2, x)) \\ &\equiv (\exists x)\neg(\neg P(x) \vee O(2, x)) \\ &\equiv (\exists x)(\neg(\neg P(x)) \wedge \neg O(2, x)) \\ &\equiv (\exists x)(P(x) \wedge \neg O(2, x)).\end{aligned}$$

A második lépésben az $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ azonosságot használtuk, az utolsó előtti lépésben pedig a $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$ De Morgan azonosságot alkalmaztuk. Tehát az eredeti ítélet tagadása:

Van olyan páros szám, amely nem osztható 2-vel.

Megjegyzés.

Az ítéletkalkulussal ellentétben predikátumkalkulusban nincs algoritmus annak eldöntésére, hogy két formula logikailag ekvivalens-e, mert minden interpretációt meg kellene vizsgálni.

A matematikai logika arra jó például, hogy.

- segíti az egyértelmű fogalmazást,
- megkönnyíti az állítások tagadását,
- segít, hogy helyes következtetéseket vonjunk le,
- kapcsolódik a programozáshoz.

Halmazok

Halmazelmélet

Mi a halmaz?

A **halmaz** és a **halmaz eleme** alapfogalom, nem definiáljuk, de körülírhatjuk, hogy mit tekinthetünk halmaznak. Halmazon elemek egyértelműen meghatározott összességét értjük. Fontos, hogy bármely x -re (a kismacskától a $\sqrt{2}$ -ig) objektíven meghatározható legyen, hogy x eleme vagy nem eleme a kérdéses összességnek. (Például az I. éves szorgalmas informatikus hallgatók összessége nem alkot halmazt, mert a szorgalom megítélése szubjektív.) Az, hogy a halmaz az elemek egyértelműen meghatározott összessége, arra vonatkozik, hogy mindenki pontosan ugyanazon x -eket tekintse az összesség elemeinek. Tehát az objektivitásra utal, és nem arra, hogy ténylegesen el tudjuk-e dönteni, hogy x eleme-e a halmaznak.

Jelölés.

Az $x \in A$ jelölést használjuk annak kifejezésére, hogy x eleme az A halmaznak. A halmazt többnyire a $\{, \}$ zárójelek között az elemek „felsorolásával” adjuk meg, de megadhatjuk ún. általános elem és definiáló tulajdonságok segítségével is.

Példa.

- $\{2, 3, 5, 7\} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ egyjegyű prímszám}\}.$
- $\{2, 3, 4, 5, \dots\} = \{x \in \mathbb{Z} : x > 1\}.$
- $\{x \in \mathbb{N} : (\exists y \in \mathbb{N})(x = 3y)\} = \{x \in \mathbb{N} : 3 \text{ osztója } x\text{-nek}\}.$
- $\{(x, y) : x, y \text{ valós számok és } x^2 + y^2 < 1\},$ az origó középpontú egységgörbő belső pontjainak halmaza.

Definíció.

Ha az A és B halmazoknak ugyanazok az elemei, azaz $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$, akkor azt mondjuk, hogy **egyenlők**, és azt írjuk, hogy $A = B$. Halmaz esetén minden elem csak egyszer számít, tehát például $\{1, 2, 3, 1, 2, 2\} = \{1, 2, 3\}$.

Definíció: részhalmaz.

Ha A minden eleme B -nek is eleme, azaz $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$, akkor azt mondjuk, hogy A **részhalmaza** B -nek, és azt írjuk hogy $A \subseteq B$. Az A halmaz **valódi részhalmaza** B -nek, amelyet $A \subset B$ -vel jelölünk, ha $A \subseteq B$, de $A \neq B$.

Definíció: üreshalmaz.

Azt a halmazt, melynek nincsen eleme, **üreshalmaznak** nevezzük (jel.: $\emptyset$). Azaz $\neg(\exists x)(x \in \emptyset)$ teljesül az üreshalmazra.

Tétel.

Tetszőleges A, B, C halmazokra

- (a) $A \subseteq A$ és $\emptyset \subseteq A$,
- (b) ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$ (ún. tranzitivitás),
- (c) $A = B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$ (ún. antiszimmetria).

Megjegyzés.

Bármely A halmaz esetén az A és $\emptyset$ halmazokat az A halmaz **triviális részhalmazainak** nevezzük.

A (c) rész (antiszimmetria) gyakran hasznos annak igazolására, hogy két halmaz egyenlő.

Példa.

Tekintsük a következő halmazokat: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, (3 - 1)\}$, $C = \{1, 1, 2\}$, $D = \{\emptyset, 1, 2\}$, $E = \{\{1\}, 2\}$ és $F = \{\{1, 2\}\}$.

- $A = B = C$, a D , E és F halmazok páronként különbözők.
- Elemek száma: a D halmaznak három, F -nek egy eleme van, a többi halmaz kételemű. Azaz $|A| = |B| = |C| = |E| = 2$, $|D| = 3$, $|F| = 1$.
- Az $\{1\}$ halmaz részhalmaza az A , B , C és D -nek, de E és F -nek nem.
- Az $\{1\}$ halmaz eleme az E -nek, a többinek nem.
- Az $\{1, 2\}$ halmaz részhalmaza az A , B , C és D -nek, de E és F -nek nem.
- Az $\{1, 2\}$ halmaz eleme az F -nek, a többinek nem.
- Az $\emptyset$ halmaz minden halmaznak részhalmaza (ld. előző tétel (a) része).
- Az $\emptyset$ halmaz eleme a D halmaznak (abban van felsorolva elemként), a többinek nem.

Definíció.

Legyen F olyan formula, melynek csak az x változó szabad változója. Ekkor $\{x : F\}$ azt az A halmazt jelöli, amelyre $(\forall x)(F \leftrightarrow x \in A)$ teljesül. Ha nem világos, hogy x milyen U individuumtartomány eleme lehet, akkor az $\{x \in U : F\}$ jelölést használjuk. Formula helyett sokszor csak szöveges predikátumot írunk amelyet megfelelően lehetne formalizálni.

Példa.

Az $\{1, 2, 3, 6\}$, $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ osztója } 6\text{-nak}\}$, $\{x \in \mathbb{Z} : x \geq 1 \text{ és } x \mid 6\}$, $\{\text{hat pozitív osztói}\}$ halmazok mind egyenlők.

Definíció: unió és metszet, diszjunkt halmazok.

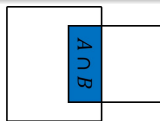
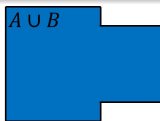
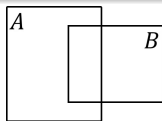
Tetszőleges A és B halmazokra definiáljuk az **egyesítésüket** (uniójukat) és **metszetüket**:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}, \quad A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Azt mondjuk, hogy A és B **diszjunktak**, ha $A \cap B = \emptyset$.

Megjegyzés.

Szokás a halmazokat síkbeli tartományokkal, azaz ún. **Venn-diagramokkal** szemléltetni. A Venn-diagram nem mindig szemlélteti az általánosságot, tehát Venn-diagramokkal – általában – egzakt bizonyítás nem adható.



Definíció: komplementer.

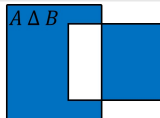
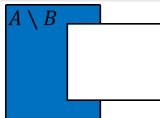
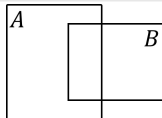
Legyen rögzítve egy U (halmaz az) **univerzum (alaphalmaz)**. Ekkor tetszőleges $A \subseteq U$ halmazra definiáljuk az A halmaz komplementerét:

$$\bar{A} = \{x \in U : x \notin A\}.$$

Definíció: különbség és szimmetrikus különbség.

Tetszőleges A és B halmazokra definiáljuk a **különbségüket** és **szimmetrikus különbségüket**:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}, \quad A \triangle B = \{x : x \in A \leftrightarrow x \notin B\}.$$



Tétel (a kommutativitásról & az asszociativitásról).

Tetszőleges A, B, C halmazokra érvényesek az alábbi azonosságok:

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$A \cap B = B \cap A,$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$A \triangle B = B \triangle A,$$

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

Tétel (a disztributivitásról).

Tetszőleges A, B, C halmazokra érvényesek az alábbi azonosságok:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

Megjegyzés.

A fenti azonosságok többsége nagyon emlékeztet a tanult alapvető logikai ekvivalenciákra; ez nem meglepő, hiszen a halmazműveleteket logikai műveletek segítségével definiáltuk.

Tétel (egyéb azonosságok).

Tetszőleges $A, B, C \subseteq U$ halmazokra érvényesek:

$$\begin{array}{lll} A \cap A = A, & A \cup A = A, & \text{(idempotencia)} \\ (A \cup B) \cap A = A, & (A \cap B) \cup A = A, & \text{(abszorptivitás)} \end{array}$$

valamint a De Morgan azonosságok:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Tétel (további egyéb azonosságok).

Tetszőleges $A, B, C \subseteq U$ halmazokra érvényesek:

$$\overline{\overline{A}} = A,$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset,$$

$$A \cap U = A,$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset,$$

$$A \setminus B = A \cap \overline{B},$$

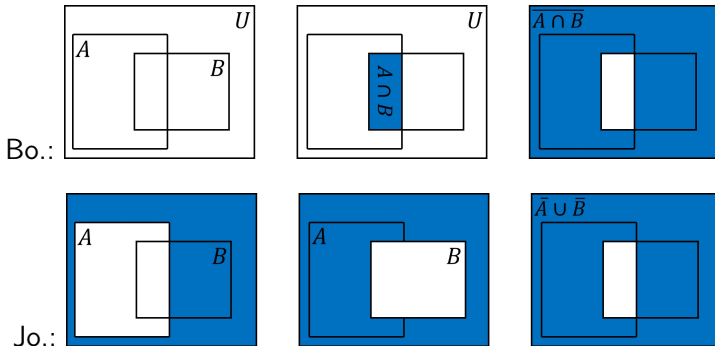
$$A \cup \overline{A} = U,$$

$$A \cup U = U,$$

$$A \cup \emptyset = A,$$

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Az $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ De Morgan azonosság Venn-diagrammos „bizonyítása”:



Definíció: metszet és unió általában.

Legyen $\mathcal{I}$ tetszőleges indexhalmaz (tehát tetszőleges nemüres halmaz, amelynek elemeit indexelésre használjuk), és minden egyes $i \in \mathcal{I}$ -re legyen adott egy A_i halmaz. Ekkor

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x : (\forall i \in \mathcal{I})(x \in A_i)\} \quad (\text{metszet}),$$

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x : (\exists i \in \mathcal{I})(x \in A_i)\} \quad (\text{unió}).$$

Ha $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$, akkor a fenti helyett az alábbi jelölések is szokásosak:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i, \quad \text{vagy} \quad A_1 \cup \dots \cup A_n.$$

Példa.

Mutassuk meg, hogy a metszet disztributív a szimmetrikus differenciára:

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

1. megoldás (táblázat segítségével): Legyenek $A, B, C \subseteq U$ tetszőleges halmazok, valamint legyen $L = A \cap (B \triangle C)$ és $R = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$. Azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges $x \in U$ elemre $x \in L$ pontosan akkor teljesül, ha $x \in R$. Nyolc esetet különböztetünk meg annak megfelelően, hogy az A, B, C halmazok közül az x melyiknek eleme. A következő táblázatban az $\in$, illetve $\notin$ úgy értendő, hogy x eleme, illetve nem eleme az oszlopfejlécként írt halmaznak. A táblázat kitöltése után látható, hogy $x \in L$ pontosan akkor teljesül, ha $x \in R$. Tehát $L = R$. 

Példa (folyt.).

A	B	C	$B \triangle C$	L	$A \cap B$	$A \cap C$	R
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$

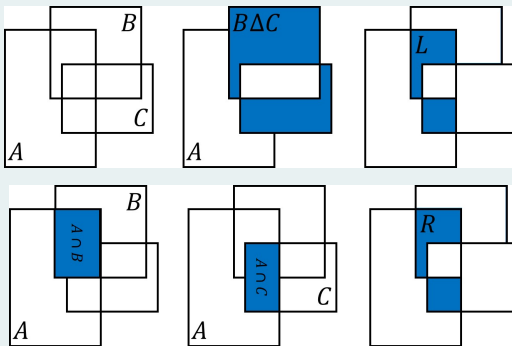


Megjegyzés.

Ez a táblázat nagyon emlékeztet az ítéletkalkulusnál látott igazságtáblázatokra. Ez nem véletlen, hiszen a halmazműveleteket logikai műveletek segítségével definiáltuk.

Példa (folyt.).

2. megoldás (Venn-diagram segítségével): Korábban említettük, hogy a Venn-diagram nem mindig ad korrekt bizonyítást, de most, ha olyan síkidomokkal reprezentált halmazokat veszünk fel az ábrán, ahol az előző nyolc eset mindegyike fellép, akkor az előző bizonyítást ismételhetjük meg szemléletes formában. (Több halmaz esetén a Venn-diagramot nehezebb felrajzolni.)



Definíció: hatványhalmaz.

Tetszőleges A halmaz esetén az A összes részhalmazainak halmazát az A halmaz **hatványhalmazának** nevezzük és $P(A)$ -val jelöljük, azaz $P(A) = \{X : X \subseteq A\}$.

Példa.

Az $A = \{1, 2, 3\}$ háromelemű halmaz hatványhalmaza

$$P(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

8-elemű.

Példa.

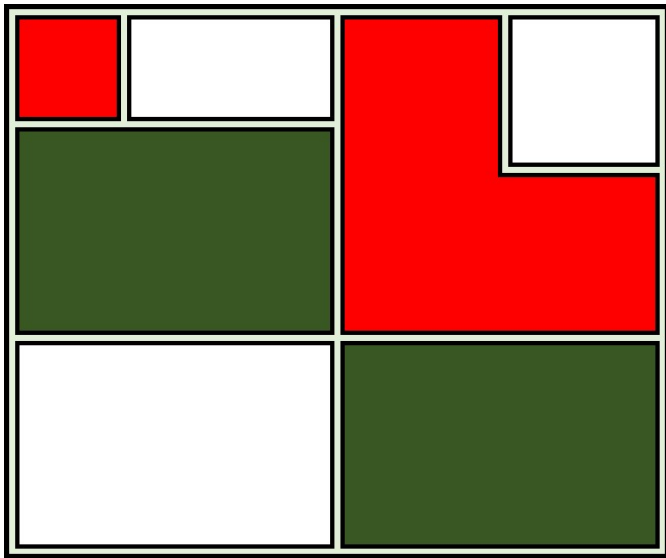
- Az üreshalmaznak csak az üreshalmaz a részhalmaza, ezért $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, azaz egy olyan 1-elemű halmaz, amelynek egyetlen eleme van, az üreshalmaz.
- Mivel a $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ halmaznak az üreshalmaz és önmaga a két részhalmaza, így $P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Definíció: osztályozás.

Legyen A tetszőleges halmaz, és legyen $\mathcal{C} \subseteq P(A)$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ **osztályozás az A halmazon** vagy más szóval **osztályozása az A halmaznak**, ha

- (1) bármely $X \in \mathcal{C}$ -re $X \neq \emptyset$,
- (2) bármely $X, Y \in \mathcal{C}$ -re $X = Y$ vagy $X \cap Y = \emptyset$,
- (3) $A = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$.

Amennyiben $\mathcal{C}$ osztályozás az A halmazon, akkor $\mathcal{C}$ elemeit **osztályoknak** nevezzük. A definíció szerint: az osztályok (1) nem üresek, (2) páronként diszjunktak, és (3) lefedik az A halmazt. Szokás az osztályozást **partíciónak** vagy **faktorhalmaznak** is nevezni.



Példa.

Osztályozás-e $\mathcal{C} \subseteq P(A)$ az adott A halmazon?

(a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\mathcal{C} = \{X \subseteq A : |X| = 3\}$,

(b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}$,

(c) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}$.

(a) Nem, a részhalmazok nem diszjunktak.

(b) Igen.

(c) Nem, mert a részhalmazok nem fedik le A -t.

Példa.

Keressük meg $A = \{1, 2, 3\}$ összes osztályozását (partícióját). A definíció szerint A éppen a $\mathcal{C}$ -beli halmazok diszjunkt uniója. A 3-elemű halmazt fel lehet bontani egyetlen 3-elemű osztályra ($3 = 3$), vagy egy kételemű és egy egyelemű osztályra ($3 = 2 + 1$), vagy három egyelemű osztályra ($3 = 1 + 1 + 1$). Minden esetben meg kell vizsgálni, hogy hány ilyen felbontás lehetséges, és azt kapjuk, hogy összesen 5 osztályozása van A -nak:

$$\{\{1, 2, 3\}\},$$

$$\{\{1, 2\}, \{3\}\}, \quad \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \quad \{\{1, 3\}, \{2\}\},$$

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

Definíció: rendezett elempár.

Tetszőleges a és b elemekre definiáljuk az (a, b) **rendezett elempárt**. Az (a, b) rendezett elempárnak a az első és b a második komponense. Két rendezett elempár akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő komponenseik egyenlők, azaz $(a, b) = (c, d)$ pontosan akkor teljesül, ha $a = c$ és $b = d$.

Megjegyzés.

A komponensek sorrendje fontos, tehát (az $a = b$ esetet leszámítva) $(a, b) \neq (b, a)$. Ezzel szemben a halmazok esetén a sorrend lényegtelen, tehát $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Definíció: Descartes-szorzat.

Tetszőleges A és B halmazokra definiáljuk a **Descartes-szorzatukat**:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Azonos tényezők szorzatát hatványként is jelölhetjük: pl. $A \times A = A^2$.

Példa.

Az $A = \{1, 2\}$ kételemű és $B = \{3, 4, 5\}$ háromelemű halmazok Descartes-szorzata az

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$

hatelemű halmaz.

Tétel.

Tetszőleges A és B halmazokra $A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset$ teljesül.

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy (a, b) eleme az $A \times \emptyset$ Descartes-szorzatnak. Ekkor $b \in \emptyset$ következik, ami nem lehetséges. Így ellentmondásra jutottunk. $\diamond$

Az elektronikus tesztek a

<https://www.math.u-szeged.hu/~mmaroti/tests/>

oldalon érhetők el. Az első elektronikus teszt a második hét végén indul, regisztrálni már lehet. További részletek az előadó honlapján:

https://www.math.u-szeged.hu/~katai/matinf1_25/mi1_tesztek.htm

E-teszt.

Legyen az individuumtartomány az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz, és legyen $g(x)$ az az 1-változós függvény A -n, amelyre

$$g(1) = 2, \quad g(2) = 3, \quad g(3) = 2, \quad g(4) = 3.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$E(x, y) : x \text{ egyenlő } y\text{-nal}, \quad R(x, y) : x + y = 4, \quad P(x) : x \text{ páros}.$$

Döntse el, hogy az alábbi állítások igazak-e.

- $(\exists x)(\exists y)R(x, y)$
- $(\forall x)(\exists y)E(x, g(y))$
- $(\exists x)(\forall y)(R(x, y) \rightarrow (P(g(x)) \wedge P(g(y))))$

E-teszt.

Legyen az individuumtartomány az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz, és legyen $g(x)$ az az 1-változós függvény A -n, amelyre

$$g(1) = 2, \quad g(2) = 3, \quad g(3) = 2, \quad g(4) = 3.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$E(x, y) : x \text{ egyenlő } y\text{-nal}, \quad R(x, y) : x + y = 4, \quad P(x) : x \text{ páros}.$$

Döntse el, hogy az alábbi állítások igazak-e.

- $(\exists x)(\exists y)R(x, y)$ **igaz**, például $x = 1$ és $y = 3$, vagy $x = y = 2$.

Vannak olyan A -beli elemek, amelyek összege 4.

E-teszt.

Legyen az individuumtartomány az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz, és legyen $g(x)$ az az 1-változós függvény A -n, amelyre

$$g(1) = 2, \quad g(2) = 3, \quad g(3) = 2, \quad g(4) = 3.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$E(x, y) : x \text{ egyenlő } y\text{-nal}, \quad R(x, y) : x + y = 4, \quad P(x) : x \text{ páros}.$$

Döntse el, hogy az alábbi állítások igazak-e.

- $(\forall x)(\exists y)E(x, g(y))$ **hamis**, a g -nél az 1 és a 4 sem áll elő képként.

Minden $x \in A$ elemhez van olyan $y \in A$ elem, amelyre $x = g(y)$ teljesül.

E-teszt.

Legyen az individuumtartomány az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz, és legyen $g(x)$ az az 1-változós függvény A -n, amelyre

$$g(1) = 2, \quad g(2) = 3, \quad g(3) = 2, \quad g(4) = 3.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$E(x, y) : x \text{ egyenlő } y\text{-nal}, \quad R(x, y) : x + y = 4, \quad P(x) : x \text{ páros}.$$

Döntse el, hogy az alábbi állítások igazak-e.

- $(\exists x)(\forall y)(R(x, y) \rightarrow (P(g(x)) \wedge P(g(y))))$ **igaz**, ha $x = 4$ -et választjuk, akkor $R(x, y)$ tetszőleges y esetén hamis, mivel az implikáció előtagja hamis, így az implikáció igaz, függetlenül attól, mi szerepel az utótagban.

*Van olyan $x \in A$, hogy minden $y \in A$ elem esetén,
ha $x + y = 4$, akkor $g(x)$ és $g(y)$ páros.*

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak tetszőleges U halmazra és tetszőleges (nem feltétlen különböző) $a, b \in U$ elemekre (1 pont jár, ha mind a három válasz helyes).

- $|\{(a, b)\}| = 2$. **Hamis**, csak egy eleme van (a, b) .
- $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \cup \emptyset$. **Igaz**.
- $\{a, b\} \in \{a, b\}$. **Hamis**, $a, b \in \{a, b\}$, de az $\{a, b\}$ nem eleme, hanem részhalmaza önmagának.