

TUDNIVALÓK

- A zárthelyi dolgozatban 6 feladat lesz.
- Tollon kívül más segédeszköz nem használható.
- A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésükre.

1. Feladat. Egy 6-tagú család elmegy a cukrászdába, ott 8-féle sütiből választhatnak (mindegyikből van elég). Hányféleképpen rendelhetnek, ha

- (a) mindenki egy-egy sütit rendel, amit a cukrászdában esznek meg.
- (b) közösen választanak 4 különböző sütit, amit majd otthon esznek meg.
- (c) együtt választanak 9 darab sütit, ami akár egy fajtából is lehet, és majd otthon megeszik közösen.

Nem kell kiszámolni a végeredményt, elég a formula. **Válaszait indokolja!**

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) 8^6 .
- (b) $\binom{8}{4}$.
- (c) $\binom{8-1+9}{9}$.

2. Feladat.

- (a) Egy ékszerboltban 17 darab, dobozban lévő ékszert akarnak kirakni egymás mellé egy olyan kirakatba, ami 3 részből áll. Hányféleképpen tehetik meg, ha akár az összes doboz elfér egy kirakatrészben, és számít az is, hogy az adott rekeszben milyen sorrendben helyezkednek el az ékszerek?
- (b) Tizenkét fős társaság szeretne bejutni egy fesztiválra egymás után sorban állva. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a társaság két tagja, Vilma és Irma, nincsenek jóban, így ők semmiképp se akarnak egymás mögött állni?

Nem kell kiszámolni a végeredményt, elég a formula. **Válaszait indokolja!**

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $\frac{19!}{2!}$
- (b) $12! - 2 \cdot 11!$

3. Feladat. Döntse el, hogy megadható-e olyan összefüggő egyszerű gráf, amely pontjainak fokszáma az alábbi? Ha létezik a gráf, akkor izomorfia erejéig adjuk meg az összeset. **Válaszait indokolja!**

- (a) 1, 2, 3, 4, 5;
- (b) 1, 1, 2, 3, 4, 5, 5;
- (c) 2, 2, 2, 3, 3, 6, 6;
- (d) 1, 1, 2, 2, 3, 3.

(6 pont)

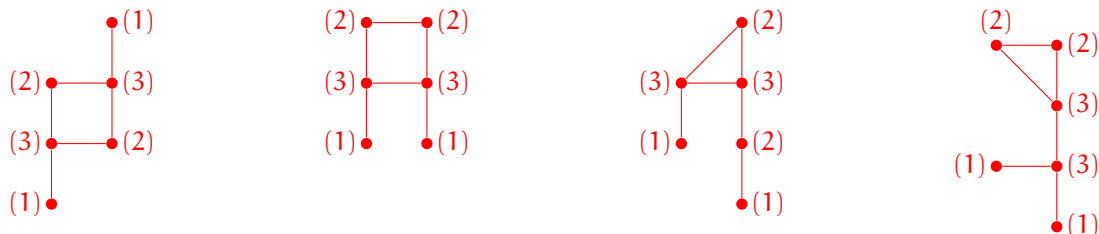
MEGOLDÁS.

- (a) nem létezik;

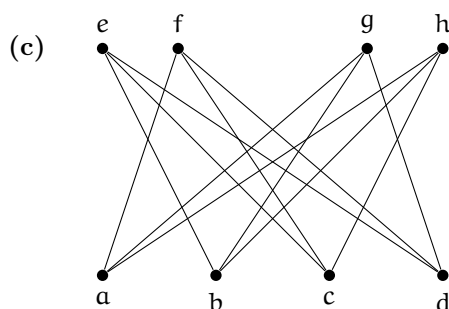
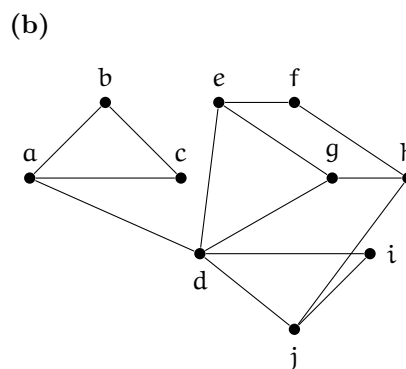
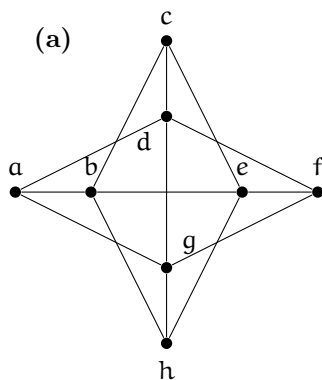
(b) nem létezik;

(c) egy létezik;

(d) Izomorfia erejéig négy létezik. Mivel a gráfnak 6 pontja van, és foksámösszegeből megkapható, hogy $\frac{12}{2} = 6$ él van a gráfban, ezért nem lehet fa a keresett egyszerű összefüggő gráf, tehát van benne kör. A gráfban a foksámok miatt 4- vagy 3-hosszú kör lehet, így a következőket kapjuk izomorfia erejéig:



4. Feladat. Létezik-e Hamilton-út, illetve Hamilton-kör az alábbi gráfokban? **Válaszait indokolja!**



(6 pont)

MEGOLDÁS.

(a) Hamilton-kör: a, b, c, e, h, g, f, d, a, Hamilton-út: a, b, c, e, h, g, f, d.

(b) Hamilton-út: c, b, a, d, g, e, f, h, j, i, Hamilton-kör nincs a gráfban, elhagyva a d pontot a gráf két komponensre esik szét.

(c) Hamilton-kör: a, f, c, h, b, e, d, g, a, Hamilton-út: a, f, c, h, b, e, d, g.

5. Feladat. **Válaszait indokolja!**

(a) Hány összefüggő komponense van annak az erdőnek, aminek 20 pontja van, és 14 éle?

(b) Adja meg izomorfia erejéig az összes 4-pontú erdőt.

(6 pont)

MEGOLDÁS.

(a) 6 komponense van.

(b) 6 darab 4-pontú erdő van.

6. Feladat. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges n természetes szám esetén: $5 \mid 6^n - 5n + 4$.

(6 pont)

MEGOLDÁS. Az állítást n szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

Kezdő lépés: Ha $n = 1$, akkor $6^n - 5n + 4 = 6^1 - 5 \cdot 1 + 4 = 5$ osztható 5-tel. Ezért az állítás igaz $n = 1$ esetén.

Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy az állítás igaz n esetén, azaz $5 \mid 6^n - 5n + 4$.

Indukciós lépés: Melyben megmutatjuk, hogy az állítás $(n+1)$ -re is igaz. A $6^{n+1} - 5(n+1) + 4$ kifejezést úgy alakítjuk, hogy alkalmazni tudjuk az indukciós feltevésünket:

$$\begin{aligned} 6^{n+1} - 5(n+1) + 4 &= 6 \cdot 6^n - 5n - 5 + 4 = 6^n - 5n + 4 + 5 \cdot 6^n - 5 \\ &= \underbrace{6^n - 5n + 4}_{(*)} + \underbrace{5(6^n - 1)}_{(**)}. \end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint $5 \mid 6^n - 5n + 4$, ezért 5 osztója $(*)$ -nak, és az világos, hogy 5 osztója $(**)$ -nak, ezért $5 \mid (*) + (**) = 6^{n+1} - 5(n+1) + 4$ is teljesül.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül a feladatbeli oszthatóság.

7. Feladat. Az a_n ($n \in \mathbb{N}$) sorozat elemeit az alábbi rekurzió definiálja:

$$a_1 = 2, \quad a_n = 3a_{n-1} + 4 \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Mutassa meg, hogy $a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2$ ($n \in \mathbb{N}$).

(6 pont)

MEGOLDÁS. Az állítást n szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

Kezdő lépés: Ha $n = 1$, akkor $a_1 = 2 = 4 \cdot 3^{1-1} - 2$. Ezért az állítás igaz $n = 1$ esetén.

Indukciós feltevés: Legyen $n \geq 2$ természetes szám, és tegyük fel, hogy az állítás igaz $k = n - 1$ esetén, azaz $a_{n-1} = 4 \cdot 3^{n-2} - 2$ ($1 \leq k < n$).

Indukciós lépés: Melyben megmutatjuk, hogy az állítás n -re is igaz. Az a_n elemet úgy alakítjuk, hogy alkalmazni tudjuk az indukciós feltevésünket. A rekurziós összefüggés szerint $a_n = 3a_{n-1} + 4$, ezért

$$a_n \stackrel{\text{rek. öf.}}{=} 3a_{n-1} + 4 \stackrel{\text{ind. fel.}}{=} 3(4 \cdot 3^{n-2} - 2) + 4 = 4 \cdot 3^{n-1} - 2.$$

Ezzel igazoltuk, hogy az állítás n -re is teljesül.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül az $a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2$ egyenlőség.

8. Feladat. Indirekt módon bizonyítsa be, hogy a változók tetszőleges logikai értékei esetén igaz az alábbi formula

$$((\neg p) \wedge q) \rightarrow ((p \leftrightarrow (\neg q)) \wedge q).$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. Tegyük fel, hogy p és q igazságértéke megválasztható úgy, hogy a formula igazságértéke hamis legyen. Ekkor

$$\begin{aligned} ((\neg p) \wedge q) \rightarrow ((p \leftrightarrow (\neg q)) \wedge q) \text{ hamis} &\iff (\neg p) \wedge q \text{ igaz és } (p \leftrightarrow (\neg q)) \wedge q \text{ hamis} \\ &\iff p \text{ hamis, } q \text{ igaz és } (p \leftrightarrow (\neg q)) \wedge q \text{ hamis.} \end{aligned}$$

Ez azonban ellentmondásra vezet, mivel p hamis, q igaz esetén a $(p \leftrightarrow (\neg q)) \wedge q$ formula igazságértéke igaz:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{p}_{\text{h}} \leftrightarrow \underbrace{(\neg q)}_{\text{i}}}_{\text{h}} \wedge \underbrace{q}_{\text{i}}}_{\text{i}}.$$

Mivel indirekt feltevésünk ellentmondásra vezetett, ezért p és q igazságértéke nem választható meg úgy, hogy a formula igazságértéke hamis legyen, azaz a változók tetszőleges logikai értéke esetén igaz a formula igazságértéke.

9. Feladat.

- (a) Váltsa át az 113_{10} számot bináris számrendszerbe. Ellenőzésként írja fel a számot 2-hatványok összegeként.
- (b) Váltsa át az 59_{10} számot hexadecimális számrendszerbe.
- (c) Váltsa át az 1011011011_2 bináris számot hexadecimális számrendszerbe.

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) 1110001_2 ,
- (b) $3B_{16}$,
- (c) $2DB_{16}$.

10. Feladat. Váltsa át az alábbi tizedestörteket bináris számrendszerbe. Ha hamarabb nem ér véget az algoritmus, akkor 5 számjegyre számoljuk a törtrészt.

- (a) $0,625_{10}$,
- (b) $0,24_{10}$.

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $0,101_2$,
- (b) $0,00111_2$.

11. Feladat. Végezze el a következő összeadásokat abban a számrendszerben, amiben a számok meg vannak adva. A számolás során jelöljük a továbbvitt számjegyeket is.

- (a) $10111_2 + 1110_2$,
- (b) $16A2_{16} + 7B8_{16}$.

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) 100101_2 ,
- (b) $1E5A_{16}$.

12. Feladat. Bontsa prímszámhatványokra az $a = 300$ és $b = 252$ természetes számokat, és határozza meg a (pozitív) **osztóik számát**. Továbbá, a prímszámhatványozás felbontást felhasználva, adja meg **a és b legnagyobb közös osztóját és a legkisebb közös többszörösét** (a legkisebb közös többszöröst elég szorzatként megadni).

(6 pont)

MEGOLDÁS. $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $\tau(300) = \tau(252) = 18$, $\text{lko}(300, 252) = 12$, $\text{lkt}(300, 252) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 6300$.

13. Feladat. Határozza meg euklideszi algoritmussal a 126 és -48 egész számok legnagyobb közös osztóját, és adja meg legkisebb közös többszörösüket (a legkisebb közös többszöröst nem kell számmal megadni, elég a formula). (6 pont)

MEGOLDÁS. $\text{lko}(126, -48) \sim 6$, $\text{lkt}(126, -48) \sim \frac{126 \cdot (-48)}{6} \sim 21 \cdot 48 \sim 1008$.

14. Feladat. Egy kis vállalkozásban kézműves szaloncukrokat készítenek. Irmát és Vilmát bízzák meg a szaloncukrok dobozba helyezésével (ezért nincsenek jóban, ld. 2.(b) Feladat). Irma olyan dobozokba rakja a szaloncukrokat, amibe 9 szaloncukor fér, Vilma pedig olyanokba, amibe 12 rakható bele.

- (a) Hány teljes dobozt tud megtölteni 100 szaloncukorral Irma, és hányat Vilma? Mennyi marad ki a szaloncukrokból Irma, illetve Vilma esetén?
- (b) Ha egyszerre kezdték a munkát, és azonos tempóban pakolják a szaloncukrokat, akkor hány szaloncukrot kell elrakniuk, amíg ismét egyszerre kezdenek el megtölteni egy-egy új dobozt?

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $100 = 9 \cdot 11 + 1$, $100 = 12 \cdot 8 + 4$, így Irma 11 dobozt, Vilma pedig 8 dobozt tud megtölteni, és Irmánál 1 szaloncukor marad ki, Vilmánál pedig 4.
- (b) Mivel $\text{lkt}(9, 12) = 36$, így 36 szaloncukor után kezdenek el ismét egyszerre megtölteni egy-egy új dobozt.

15. Feladat. Kanonikus alakban számolva adja meg a következő komplex számot kanonikus alakban. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\frac{\overline{(2+i)}(1+3i)}{3+2i}.$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. $\frac{25}{13} + \frac{5}{13}i$.

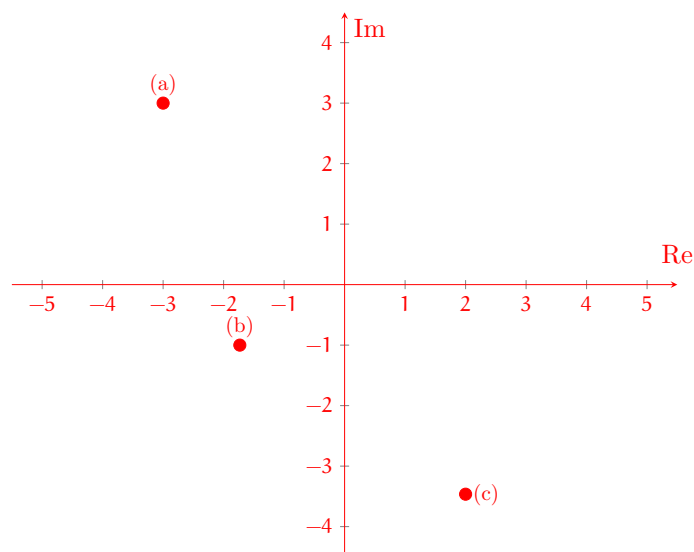
16. Feladat.

- (a) Ábrázolja, majd adja meg trigonometrikus alakban a $-3 + 3i$ komplex számot.
- (b) Ábrázolja, majd adja meg kanonikus alakban a $2\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$ komplex számot.
- (c) Ábrázolja, majd adja meg kanonikus alakban a $4e^{\frac{5\pi}{3}i}$ komplex számot.

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $3\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$.
- (b) $-\sqrt{3} - i$.
- (c) $2 - 2\sqrt{3}i$.



17. Feladat.

- (a) Adja meg trigonometrikus alakban $2\sqrt{3} - 2i$ komplex számot.
- (b) Végezze el a $\left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)\right)^{26}$ hatványozást a komplex számok körében a tanult képlet felhasználásával. A végeredményét adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is.

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $4 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right).$
- (b) $2^{13} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right) = -2^{13}i.$

18. Feladat.

- (a) Adja meg trigonometrikus alakban a $3 - 3i$ komplex számot.
- (b) Végezze el a $\sqrt[3]{3(\cos \pi + i \sin \pi)}$ gyökvonást a tanult képlet felhasználásával. A gyököket adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is.

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $3\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$
- (b) $\sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt[3]{3}}{2} + \frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{3}}{2}i,$
 $\sqrt[3]{3}(\cos \pi + i \sin \pi) = -\sqrt[3]{3},$
 $\sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt[3]{3}}{2} - \frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{3}}{2}i.$