

TUDNIVALÓK

- A zárthelyi dolgozatban 6 feladat lesz.
- Tollon kívül más segédeszköz nem használható.
- A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésükre.

1. Feladat. Egy 6-tagú család elmegy a cukrászdába, ott 8-féle sütitől választhatnak (mindegyikből van elég). Hányféleképpen rendelhetnek, ha

- mindenki egy-egy sütit rendel, amit a cukrászdában esznek meg.
- közösen választanak 4 különböző sütit, amit majd otthon esznek meg.
- együtt választanak 9 darab sütit, ami akár egy fajtaból is lehet, és majd otthon megeszik közösen.

Nem kell kiszámolni a végeredményt, elég a formula. **Válaszait indokolja!**

(6 pont)

2. Feladat.

- Egy ékszerboltban 17 darab, dobozban lévő ékszert akarnak kirakni egymás mellé egy olyan kirakatba, ami 3 részből áll. Hányféleképpen tehetik meg, ha akár az összes doboz elfér egy kirakatrészben, és számít az is, hogy az adott rekeszben milyen sorrendben helyezkednek el az ékszerek?
- Tizenkét fős társaság szeretne bejutni egy fesztiválra egymás után sorban állva. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a társaság két tagja, Vilma és Irma, nincsenek jóban, így ők semmiképp se akarnak egymás mögött állni?

Nem kell kiszámolni a végeredményt, elég a formula. **Válaszait indokolja!**

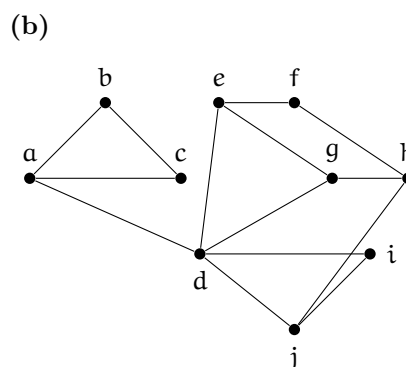
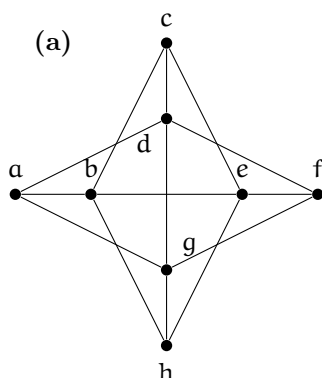
(6 pont)

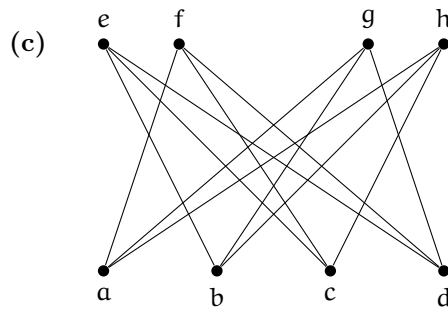
3. Feladat. Döntse el, hogy megadható-e olyan összefüggő egyszerű gráf, amely pontjainak fokszáma az alábbi? Ha létezik a gráf, akkor izomorfia erejéig adjuk meg az összeset. **Válaszait indokolja!**

- 1, 2, 3, 4, 5;
- 1, 1, 2, 3, 4, 5, 5;
- 2, 2, 2, 3, 3, 6, 6;
- 1, 1, 2, 2, 3, 3.

(6 pont)

4. Feladat. Létezik-e Hamilton-út, illetve Hamilton-kör az alábbi gráfokban? **Válaszait indokolja!**





(6 pont)

5. Feladat. Válaszait indokolja!

- (a) Hány összefüggő komponense van annak az erdőnek, aminek 20 pontja van, és 14 éle?
- (b) Adja meg izomorfia erejéig az összes 4-pontú erdőt.

(6 pont)

6. Feladat. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges n természetes szám esetén: $5 \mid 6^n - 5n + 4$.

(6 pont)

7. Feladat. Az a_n ($n \in \mathbb{N}$) sorozat elemeit az alábbi rekurzió definiálja:

$$a_1 = 2, \quad a_n = 3a_{n-1} + 4 \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Mutassa meg, hogy $a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2$ ($n \in \mathbb{N}$).

(6 pont)

8. Feladat. Indirekt módon bizonyítsa be, hogy a változók tetszőleges logikai értékei esetén igaz az alábbi formula

$$((\neg p) \wedge q) \rightarrow ((p \leftrightarrow (\neg q)) \wedge q).$$

(6 pont)

9. Feladat.

- (a) Váltsa át az 113_{10} számot bináris számrendszerbe. Ellenőzésként írja fel a számot 2-hatványok összegeként.
- (b) Váltsa át az 59_{10} számot hexadecimális számrendszerbe.
- (c) Váltsa át az 1011011011_2 bináris számot hexadecimális számrendszerbe.

(6 pont)

10. Feladat. Váltsa át az alábbi tizedestörtöket bináris számrendszerbe. Ha hamarabb nem ér véget az algoritmus, akkor 5 számjegyig számoljuk a törtrészt.

- (a) $0,625_{10}$,
- (b) $0,24_{10}$.

(6 pont)

11. Feladat. Végezze el a következő összeadásokat abban a számrendszerben, amiben a számok meg vannak adva. A számolás során jelöljük a továbbvitt számjegyeket is.

- (a) $10111_2 + 1110_2$,
- (b) $16A2_{16} + 7B8_{16}$.

(6 pont)

12. Feladat. Bontsa **prímhatványtényezőkre** az $a = 300$ és $b = 252$ természetes számokat, és határozza meg a (pozitív) **osztóik számát**. Továbbá, a prímhatványtényező felbontást felhasználva, adja meg **a és b legnagyobb közös osztóját és a legkisebb közös többszörösét** (a legkisebb közös többszöröst elég szorzatként megadni).

(6 pont)

13. Feladat. Határozza meg euklideszi algoritmussal a 126 és -48 egész számok legnagyobb közös osztóját, és adja meg legkisebb közös többszörösüket (a legkisebb közös többszöröst nem kell számmal megadni, elég a formula). (6 pont)

14. Feladat. Egy kis vállalkozásban kézműves szaloncukrokat készítenek. Irmát és Vilmát bízzák meg a szaloncukrok dobozba helyezésével (ezért nincsenek jóban, ld. 2.(b) Feladat). Irma olyan dobozokba rakja a szaloncukrokat, amibe 9 szaloncukor fér, Vilma pedig olyanokba, amibe 12 rakható bele.

- (a) Hány teljes dobozt tud megtölteni 100 szaloncukorral Irma, és hányat Vilma? Mennyi marad ki a szaloncukrokból Irma, illetve Vilma esetén?
- (b) Ha egyszerre kezdték a munkát, és azonos tempóban pakolják a szaloncukrokat, akkor hány szaloncukrot kell elrakniuk, amíg ismét egyszerre kezdenek el megtölteni egy-egy új dobozt?

(6 pont)

15. Feladat. Kanonikus alakban számolva adja meg a következő komplex számot kanonikus alakban. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\frac{\overline{(2+i)}(1+3i)}{3+2i}.$$

(6 pont)

16. Feladat.

- (a) Ábrázolja, majd adja meg trigonometrikus alakban a $-3 + 3i$ komplex számot.
- (b) Ábrázolja, majd adja meg kanonikus alakban a $2\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$ komplex számot.
- (c) Ábrázolja, majd adja meg kanonikus alakban a $4e^{\frac{5\pi}{3}i}$ komplex számot.

(6 pont)

17. Feladat.

- (a) Adja meg trigonometrikus alakban $2\sqrt{3} - 2i$ komplex számot.
- (b) Végezze el a $\left(\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)\right)^{26}$ hatványozást a komplex számok körében a tanult képlet felhasználásával. A végeredményét adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is.

(6 pont)

18. Feladat.

- (a) Adja meg trigonometrikus alakban a $3 - 3i$ komplex számot.
- (b) Végezze el a $\sqrt[3]{3(\cos \pi + i \sin \pi)}$ gyökvonást a tanult képlet felhasználásával. A gyököket adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban is.

(6 pont)