

TUDNIVALÓK

- A zárthelyi dolgozatban 6 feladat lesz.
- Tollon kívül más segédeszköz nem használható.
- A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésükre.

1. Feladat. Adja meg a **prímítéleteket**, és **formalizálja** a következő ítéletkalkulusbeli ítéletet. Határozza meg a formula **logikai értékét**, ha a formulában szereplő összes változó logikai értékét igaznak választja.

Pontosan akkor nem kell sokat várni az orvosnál, és gyorsan végzünk, ha időben jöttünk vagy kevesen vannak.

(6 pont)

MEGOLDÁS.

A: Sokat kell várni az orvosnál.

B: Gyorsan végzünk.

C: Időben jöttünk.

D: Kevesen vannak.

Formula: $(\neg A \wedge B) \leftrightarrow (C \vee D)$, ha minden változó logikai értéke igaz, akkor a formula hamis.

2. Feladat. Adja meg a **prímítéleteket**, és **formalizálja** a következő ítéletkalkulusbeli ítéleteket, és döntse el, hogy **logikailag ekvivalensek-e a kapott formulák**.

(1) *Ha nem esik az eső, elmegyek futni; és csak akkor süt a nap, ha elmegyek futni.*

(2) *Ha nem esik az eső vagy süt a nap, akkor elmegyek futni.*

(6 pont)

MEGOLDÁS.

A: Esik az eső.

B: Elmegyek futni.

C: Süt a nap.

(1): $(\neg A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow B)$

(2): $(\neg A \vee C) \rightarrow B$

(1) $\equiv$ (2) (igazságtáblázat)

3. Feladat.

(a) Igazolja a következő logikai ekvivalenciát: $(A \vee B) \wedge (C \rightarrow B) \equiv B \vee (\neg(A \rightarrow C))$.

(b) Az ismert logikai ekvivalenciák felhasználásával alakítsa át az $(A \wedge B) \rightarrow C$ formulát úgy, hogy a kapott formula negáción, diszjunkción és konjunkción kívül ne tartalmazzon más logikai műveletet, és negáció csak ítéletváltozóra vonatkozzon. Minden átalakítás során adjuk meg, hogy melyik ismert logikai ekvivalenciát használtuk.

(6 pont)

MEGOLDÁS.

(a) Igazságtáblázattal igazolható.

(b) $(A \wedge B) \rightarrow C \equiv (\neg(A \wedge B)) \vee C \equiv ((\neg A) \vee (\neg B)) \vee C$, ahol az először az $A \rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B$ ekvivalenciát használtuk, majd a $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$ De Morgan azonosságot.

4. Feladat. Határozza meg az A, B, C változókból felépített alábbi formula teljes konjunktív normálformáját:

$$(A \rightarrow (\neg B)) \leftrightarrow (A \vee (\neg C)).$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. TKNF: $((\neg A) \vee (\neg B) \vee (\neg C)) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B) \vee C) \wedge (A \vee (\neg B) \vee (\neg C)) \wedge (A \vee B \vee (\neg C))$.

5. Feladat. Legyen az individuumtartomány az $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz és legyen h az az egyváltozós függvényjel A -n, melyre

$$h(1) = 1, h(2) = 3, h(3) = 4, h(4) = 5, h(5) = 5, h(6) = 1.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$R(x, y) : x - y = 1; \quad N(x) : x \text{ négyzetszám}; \quad E(x, y) : x = y.$$

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak, illetve melyek hamisak. **Válaszait indokolja!**

- (1) $(\exists x)(N(x) \wedge R(h(x), x))$,
- (2) $(\forall x)(\exists y)(N(x) \rightarrow E(h(y), x))$.

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (1) Igaz, $x = 4$ teljesíti, mert 4 négyzetszám, és $h(4) = 5$, tehát $h(4) - 4 = 1$.
- (2) Igaz, az implikáció pontosan akkor lenne hamis, ha az előtag igaz, az utótag hamis, tehát négyzetszámokat kell venni A -ból, ami az 1 és 4, de $h(1) = 1$ és $h(3) = 4$, tehát az utótag is igaz.

6. Feladat. Az individuumtartomány az emberek halmaza. Jelölje $A(x)$ az „ x igazat mond”, $B(x, y)$ az „ x barátja y -nak” predikátumokat, c pedig a „Károly” individuumkonstanst. **Fordítsa köznapi nyelvre** az alábbi formulát. Adja meg a **formula tagadását** is úgy, hogy negáció csak predikátumjelre vonatkozzon.

$$(\exists x)(A(x) \wedge (\neg B(x, c))).$$

(6 pont)

MEGOLDÁS. Van, aki igazat mond, és Károlynak nem a barátja.

$\neg(\exists x)(A(x) \wedge (\neg B(x, c))) \equiv (\forall x)\neg(A(x) \wedge (\neg B(x, c))) \equiv (\forall x)((\neg A(x)) \vee \neg(\neg B(x, c))) \equiv (\forall x)((\neg A(x)) \vee B(x, c)) \equiv (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x, c))$. (Megjegyzés: már az utolsó előtti lépés is eleget tesz a feladatban megfogalmazott feltételnek.)

7. Feladat. Formalizálja predikátumkalkulusban az alábbi ítéletet, ahol az individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok és az individuumkonstans az alábbiak. Továbbá **adja meg szövegesen az ítélet tagadását** úgy, hogy a „nem minden” ne szerepeljen benne.

$$I(x) : \text{„}x \text{ informatikus”}, \quad Sz(x, y) : \text{„}x \text{ szomszédja } y\text{-nak”}, \\ R(x) : \text{„}x \text{ szeret röplabdázni”}, \quad v : \text{„}Viki”}.$$

Viki minden informatikus szomszédja szeret röplabdázni.

(6 pont)

MEGOLDÁS. $(\forall x)((I(x) \wedge Sz(x, v)) \rightarrow R(x))$

Tagadás: Vikinek van olyan informatikus szomszédja, aki nem szeret röplabdázni.

8. Feladat.

- (a) **Formalizálja predikátumkalkulusban** az alábbi ítéletet, ahol az individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok és az individuumkonstans az alábbiak.

$$I(x) : \text{„}x \text{ informatikus”}, \quad H(x, y) : \text{„}x \text{ haverja } y\text{-nak”}, \\ B(x) : \text{„}x \text{ szeret bulizni”}, \quad p : \text{„}Péter”}.$$

Péternek van olyan informatikus haverja, aki nem szeret bulizni.

- (b) Legyen A és B 1- illetve 2-változós predikátumjel, c pedig 1-változós függvényjel. Adja meg a következő formula tagadását úgy, hogy negáció legfeljebb csak predikátumjelre vonatkozzon.

$$(\exists x)(A(x) \wedge (\neg B(c(x), x))).$$

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $(\exists x)(I(x) \wedge H(x, p) \wedge \neg B(x))$
- (b) $\neg(\exists x)(A(x) \wedge (\neg B(c(x), x))) \equiv (\forall x)\neg(A(x) \wedge (\neg B(c(x), x))) \equiv (\forall x)((\neg A(x)) \vee \neg(\neg B(c(x), x))) \equiv$
 $(\forall x)((\neg A(x)) \vee B(c(x), x)) \equiv (\forall x)(A(x) \rightarrow B(c(x), x)).$ (Megjegyzés: már az utolsó előtti lépés is eleget tesz a feladatban megfogalmazott feltételnek.)

9. Feladat. Legyen az alaphalmaz $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, és tekintse a következő halmazokat: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$ és $C = \{2, 3, 5, 7\}$. Határozza meg az alábbi halmazok elemeit.

- (a) $\bar{A} \setminus B$,
- (b) $(A \triangle C) \cap B$,
- (c) $\mathcal{P}(C \cap B)$.

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $\bar{A} \setminus B = \{7, 8\}$,
- (b) $(A \triangle C) \cap B = \{1, 5\}$,
- (c) $\mathcal{P}(C \cap B) = \{\emptyset, \{2\}, \{5\}, \{2, 5\}\}$.

10. Feladat. Adjon meg az $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ halmazon egy-egy olyan osztályozást, melynek

- (a) legalább 5 osztálya van,
- (b) minden osztálya legalább 3 elemű,
- (c) legfeljebb 3 osztálya van, és mindegyik legalább 4 elemű.

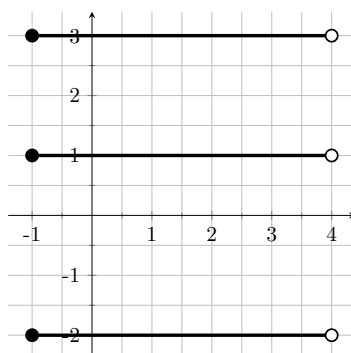
(6 pont)

MEGOLDÁS. Több megfelelő osztályozás létezik.

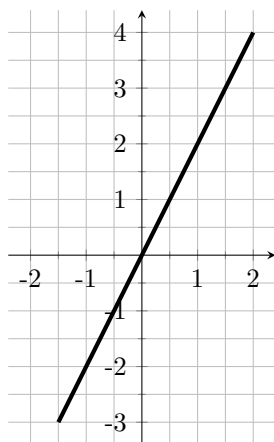
- (a) $\{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}, \{e, f\}, \{g, h\}\}$,
- (b) $\{\{a, b, c\}, \{d, e, f, g, h\}\}$,
- (c) $\{\{a, b, c, d, e, f, g, h\}\}$.

11. Feladat.

- (a) Legyen $A = (-2; 2)$ és $B = (-3; 4]$. Ábrázolja Descartes-féle koordináta-rendszerben az $A \times B$ halmazt.
- (b) Adja meg az A és B halmazokat, ha az $A \times B$ halmaz az alábbi.



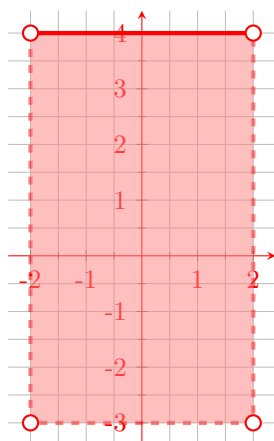
- (c) Döntse el, hogy előáll-e az adott ponthalmaz a valós számok részhalmazainak Descartes-szorzataként. **Válaszát indokolja!**



(6 pont)

MEGOLDÁS.

(a)



(b) $A = [-1; 4)$, $B = \{-2, 1, 3\}$.

- (c) Nem áll elő Descartes-szorzatként. Ugyanis a ponthalmaznak eleme az $(1, 2)$ és a $(2, 4)$ pontpár is, tehát ha előállna $A \times B$ alakban, akkor $1 \in A$, $2 \in A$, $2 \in B$ és $4 \in B$ is teljesülne, így az $(1, 4)$ elempár is benne lenne az $A \times B$ halmazban, de $(1, 4)$ nem eleme a ponthalmaznak.

12. Feladat. Adjuk meg a következő bijektív leképezések inverzét a hozzárendelési szabály megadásával.

- (a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $\alpha: A \rightarrow B$, $x\alpha = 2x - 1$;
 (b) $\beta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x\beta = \sqrt{x+1} - 1$.

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $\alpha^{-1}: B \rightarrow A$, $x\alpha^{-1} = \frac{x+1}{2}$;
 (b) $\beta^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x\beta^{-1} = (x+1)^2 - 1$.

13. Feladat. Döntse el, hogy megegyezik-e az A és a B halmaz számossága. **Válaszát indokolja!**

- (a) $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$;

(b) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{Z}$.

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ végtelen halmaz, $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, és $\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság, így $|\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}| = \aleph_0$. Mivel $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, a Számosságaritmetika Alaptételéből $|\mathbb{Q} \times \mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Tehát nem egyezik meg a számosságuk.
- (b) $|(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ és $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, így a Számosságaritmetika Alaptételéből következik, hogy $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = \mathfrak{c}$. Továbbá $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$. Tehát nem egyezik meg a számosságuk.

14. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $\alpha = \{(2, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 1), (5, 3)\}$, $\beta = \{(2, 3), (2, 4)(3, 2), (3, 3), (4, 1), (5, 1)\}$ relációk A -n. Határozza meg a következő relációkat.

- (a) $\alpha \setminus \beta$,
 (b) β^{-1} ,
 (c) $\alpha^{-1} \cap \beta$.

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $\alpha \setminus \beta = \{(2, 1), (4, 2), (5, 3)\}$,
 (b) $\beta^{-1} = \{(3, 2), (4, 2)(2, 3), (3, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,
 (c) $\alpha^{-1} \cap \beta = \{(2, 3), (2, 4)\}$.

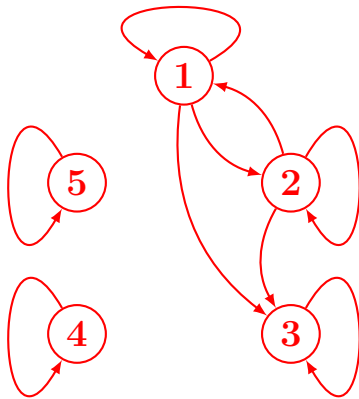
15. Feladat. Adjon meg a gráfjával egy-egy olyan relációt az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon, amely teljesíti az alábbi feltételeket. Indokolja is!

- (a) reflexív, tranzitív, de nem antiszimmetrikus,
 (b) nem reflexív, szimmetrikus, nem dichotom.

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) Például az α reláció lehet a következő gráffal megadott.

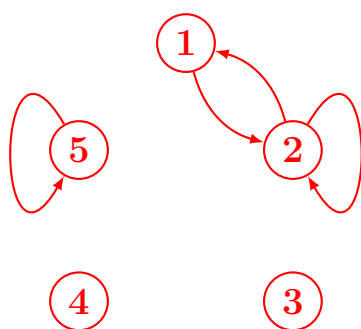


Az α reláció reflexív, mivel minden pontban van hurrokél.

Tranzitív, mert tetszőleges pontok esetén, ha egyik pontból a másikba irányított élek mentén eljutunk, akkor egy élen is el tudunk jutni.

Nem antiszimmetrikus, mert $(1, 2) \in \alpha$ és $(2, 1) \in \alpha$, de $1 \neq 2$.

- (b) Például a β reláció lehet a következő gráffal megadott.



A β nem reflexív, pl. $(1, 1) \notin \beta$.

Szimmetrikus, mert ha két pont között vezet egyik irányba él, akkor az ellentétes irányba is, és természetesen ez a hurokél esetén is igaz.

Nem dichotom, mert pl. $(1, 3) \notin \beta$ és $(3, 1) \notin \beta$. (Megj.: az hogy nem dichotom, abból is következik, hogy nem reflexív.)

16. Feladat. Vizsgálja meg, hogy teljesülnek-e az alábbi relációkra a megadott tulajdonságok. **Válaszait indokolja!**

- (a) Az $\alpha = \{(a, b) : |a - b| > 0\}$ reláció az $\mathbb{R}$ halmazon reflexív-e, szimmetrikus-e?
- (b) A $\beta = \{(x, y) : xy = 1\}$ reláció a $\{-1, 1, 2, 4, 7, 10\}$ halmazon antiszimmetrikus-e, dichotom-e?
- (c) A $\gamma = \{(x, y) : x < y\}$ reláció az $\mathbb{R}$ halmazon tranzitív-e, dichotom-e?

(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) Az α reláció nem reflexív, mert pl. $|1 - 1| = 0 \not> 0$, így $(1, 1) \notin \alpha$. Az α szimmetrikus, mert $|a - b| = |-(b - a)| = |b - a|$, így ha $(a, b) \in \alpha$, akkor $(b, a) \in \alpha$ is teljesül.
- (b) Mivel $\beta = \{(1, 1), (-1, -1)\}$, ezért nincs $a \neq b$, amelyre $(a, b), (b, a) \in \beta$, ezért β antiszimmetrikus. A β reláció nem dichotom, pl. $(1, 2) \notin \beta$ és $(2, 1) \notin \beta$.
- (c) A γ reláció tranzitív, mert tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén ha $x < y$ és $y < z$, akkor $x < z$. Nem dichotom, mert nem reflexív, sőt $x \not< x$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén.

17. Feladat. Adjon meg olyan **osztályozást** az $A = \{a, b, c, d, e\}$ halmazon, melynek három osztálya (blokkja) van. Adja meg az osztályozáshoz tartozó **ekvivalenciarelációt** az elemeinek felsorolásával. (6 pont)

MEGOLDÁS. Egy ilyen osztályozás például: $A/\rho = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}\}$.

A hozzá tartozó ekvivalenciareláció: $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b), (d, d), (e, e), (d, e), (e, d)\}$.

18. Feladat. Adja meg az alábbi ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást.

- (a) $\alpha = \{(a, b) : a\text{-nak és } b\text{-nek van azonos számjegye}\}$ az $A = \{1, 2, 4, 23, 26, 32, 47, 84\}$ halmazon,
- (b) $\beta = \{(a, b) : a \text{ és } b \text{ négyvel osztva ugyanannyi maradékot ad}\}$ az $A = \{0, 1, 3, 5, 11, 15, 16, 24\}$ halmazon.

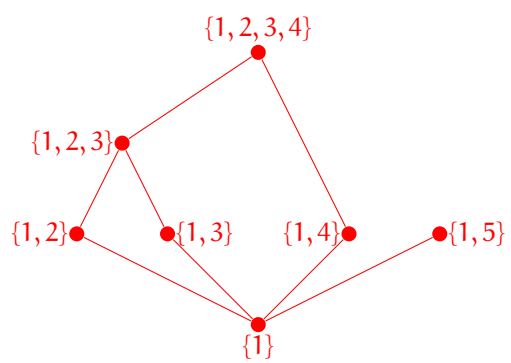
(6 pont)

MEGOLDÁS.

- (a) $\{\{1\}, \{2, 23, 26, 32\}, \{4, 47, 84\}\}$.
- (b) $\{\{0, 16, 24\}, \{1, 5\}, \{3, 11, 15\}\}$.

19. Feladat. Legyen $A = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$. Adja meg az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmaz **Hasse-diagramját**! Döntse el, hogy melyek a **minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek**. (6 pont)

MEGOLDÁS.



Minimális elem: $\{1\}$,
 maximális elemek: $\{1,2,3,4\}, \{1,5\}$,
 legkisebb elem: $\{1\}$,
 legnagyobb elem: nincs.