

TUDNIVALÓK

- A zárthelyi dolgozatban 6 feladat lesz.
- Tollon kívül más segédeszköz nem használható.
- A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésükre.

1. Feladat. Adja meg a **prímítéleteket**, és **formalizálja** a következő ítéletkalkulusbeli ítéletet. Határozza meg a formula **logikai értékét**, ha a formulában szereplő összes változó logikai értékét igaznak választja.

Pontosan akkor nem kell sokat várni az orvosnál, és gyorsan végzünk, ha időben jöttünk vagy kevesen vannak.

(6 pont)

2. Feladat. Adja meg a **prímítéleteket**, és **formalizálja** a következő ítéletkalkulusbeli ítéleteket, és döntse el, hogy **logikailag ekvivalensek-e a kapott formulák**.

(1) *Ha nem esik az eső, elmegyek futni; és csak akkor süt a nap, ha elmegyek futni.*

(2) *Ha nem esik az eső vagy süt a nap, akkor elmegyek futni.*

(6 pont)

3. Feladat.

(a) Igazolja a következő logikai ekvivalenciát: $(A \vee B) \wedge (C \rightarrow B) \equiv B \vee (\neg(A \rightarrow C))$.

(b) Az ismert logikai ekvivalenciák felhasználásával alakítsa át az $(A \wedge B) \rightarrow C$ formulát úgy, hogy a kapott formula negáción, diszjunkción és konjunkción kívül ne tartalmazzon más logikai műveletet, és negáció csak ítéletváltozóra vonatkozzon. Minden átalakítás során adjuk meg, hogy melyik ismert logikai ekvivalenciát használtuk.

(6 pont)

4. Feladat. Határozza meg az A, B, C változókból felépített alábbi formula teljes konjunktív normálformáját:

$$(A \rightarrow (\neg B)) \leftrightarrow (A \vee (\neg C)).$$

(6 pont)

5. Feladat. Legyen az individuumtartomány az $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz és legyen h az az egyváltozós függvényjel A-n, melyre

$$h(1) = 1, h(2) = 3, h(3) = 4, h(4) = 5, h(5) = 5, h(6) = 1.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$R(x, y) : x - y = 1; \quad N(x) : x \text{ négyzetszám}; \quad E(x, y) : x = y.$$

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak, illetve melyek hamisak. **Válaszeit indokolja!**

(1) $(\exists x)(N(x) \wedge R(h(x), x))$,

(2) $(\forall x)(\exists y)(N(x) \rightarrow E(h(y), x))$.

(6 pont)

6. Feladat. Az individuumtartomány az emberek halmaza. Jelölje $A(x)$ az „x igazat mond”, $B(x, y)$ az „x barátja y-nak” predikátumokat, c pedig a „Károly” individuumkonstanst. **Fordítsa köznapi nyelvre** az alábbi formulát. Adja meg a **formula tagadását** is úgy, hogy negáció csak predikátumjelre vonatkozzon.

$$(\exists x)(A(x) \wedge (\neg B(x, c))).$$

(6 pont)

7. Feladat. Formalizálja predikátumkalkulusban az alábbi ítéletet, ahol az individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok és az individuumkonstans az alábbiak. Továbbá **adja meg szövegesen az ítélet tagadását** úgy, hogy a „nem minden” ne szerepeljen benne.

$$\begin{aligned} I(x): & \text{„}x \text{ informatikus”}, & Sz(x, y): & \text{„}x \text{ szomszédja } y\text{-nak”}, \\ R(x): & \text{„}x \text{ szeret röplabdázni”}, & v: & \text{„}Viki\text{”}. \end{aligned}$$

Viki minden informatikus szomszédja szeret röplabdázni.

(6 pont)

8. Feladat.

- (a) **Formalizálja predikátumkalkulusban** az alábbi ítéletet, ahol az individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok és az individuumkonstans az alábbiak.

$$\begin{aligned} I(x): & \text{„}x \text{ informatikus”}, & H(x, y): & \text{„}x \text{ haverja } y\text{-nak”}, \\ B(x): & \text{„}x \text{ szeret bulizni”}, & p: & \text{„}Péter\text{”}. \end{aligned}$$

Péternek van olyan informatikus haverja, aki nem szeret bulizni.

- (b) Legyen A és B 1- illetve 2-változós predikátumjel, c pedig 1-változós függvényjel. Adja meg a következő formula tagadását úgy, hogy negáció legfeljebb csak predikátumjelre vonatkozzon.

$$(\exists x)(A(x) \wedge (\neg B(c(x), x))).$$

(6 pont)

9. Feladat. Legyen az alaphalmaz $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, és tekintse a következő halmazokat: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$ és $C = \{2, 3, 5, 7\}$. Határozza meg az alábbi halmazok elemeit.

- (a) $\bar{A} \setminus B$,
 (b) $(A \triangle C) \cap B$,
 (c) $\mathcal{P}(C \cap B)$.

(6 pont)

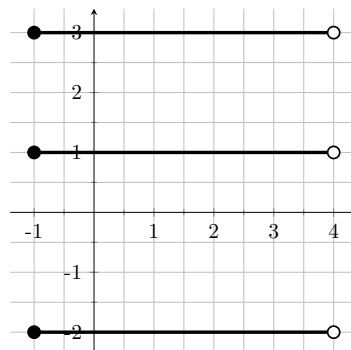
10. Feladat. Adjon meg az $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ halmazon egy-egy olyan osztályozást, melynek

- (a) legalább 5 osztálya van,
 (b) minden osztálya legalább 3 elemű,
 (c) legfeljebb 3 osztálya van, és mindegyik legalább 4 elemű.

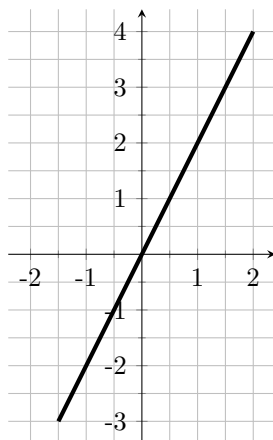
(6 pont)

11. Feladat.

- (a) Legyen $A = (-2; 2)$ és $B = (-3; 4]$. Ábrázolja Descartes-féle koordináta-rendszerben az $A \times B$ halmazt.
 (b) Adja meg az A és B halmazokat, ha az $A \times B$ halmaz az alábbi.



- (c) Döntse el, hogy előáll-e az adott ponthalmaz a valós számok részhalmazainak Descartes-szorzataaként. **Válaszát indokolja!**



(6 pont)

12. Feladat. Adjuk meg a következő bijektív leképezések inverzét a hozzárendelési szabály megadásával.

- (a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $\alpha: A \rightarrow B$, $x\alpha = 2x - 1$;
 (b) $\beta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x\beta = \sqrt{x+1} - 1$.

(6 pont)

13. Feladat. Döntse el, hogy megegyezik-e az A és a B halmaz számossága. **Válaszát indokolja!**

- (a) $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$;
 (b) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{Z}$.

(6 pont)

14. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $\alpha = \{(2, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 1), (5, 3)\}$, $\beta = \{(2, 3), (2, 4)(3, 2), (3, 3), (4, 1), (5, 1)\}$ relációk A -n. Határozza meg a következő relációkat.

- (a) $\alpha \setminus \beta$,
 (b) β^{-1} ,
 (c) $\alpha^{-1} \cap \beta$.

(6 pont)

15. Feladat. Adjon meg a **gráfjával** egy-egy olyan relációt az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon, amely teljesíti az alábbi feltételeket. **Indokolja is!**

- (a) reflexív, tranzitív, de nem antiszimmetrikus,
 (b) nem reflexív, szimmetrikus, nem dichotom.

(6 pont)

16. Feladat. Vizsgálja meg, hogy teljesülnek-e az alábbi relációkra a megadott tulajdonságok. **Válaszait indokolja!**

- (a) Az $\alpha = \{(a, b): |a - b| > 0\}$ reláció az $\mathbb{R}$ halmazon reflexív-e, szimmetrikus-e?
 (b) A $\beta = \{(x, y): xy = 1\}$ reláció a $\{-1, 1, 2, 4, 7, 10\}$ halmazon antiszimmetrikus-e, dichotom-e?
 (c) A $\gamma = \{(x, y): x < y\}$ reláció az $\mathbb{R}$ halmazon tranzitív-e, dichotom-e?

(6 pont)

17. Feladat. Adjon meg olyan **osztályozást** az $A = \{a, b, c, d, e\}$ halmazon, melynek három osztálya (blokkja) van. Adja meg az osztályozáshoz tartozó **ekvivalenciarelációt** az elemeinek felsorolásával. (6 pont)

18. Feladat. Adja meg az alábbi ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást.

(a) $\alpha = \{(a, b) : a\text{-nak és } b\text{-nek van azonos számjegye}\}$ az $A = \{1, 2, 4, 23, 26, 32, 47, 84\}$ halmazon,

(b) $\beta = \{(a, b) : a \text{ és } b \text{ négyvel osztva ugyanannyi maradékot ad}\}$ az $A = \{0, 1, 3, 5, 11, 15, 16, 24\}$ halmazon.

(6 pont)

19. Feladat. Legyen $A = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$. Adja meg az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmaz **Hasse-diagramját!** Döntse el, hogy melyek a **minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek**. (6 pont)