
MATEMATIKA INFORMATIKUSOKNAK 1. (DiMat1)

6. FELADATSOR

TELJES INDUKCIÓ, REKURZÍV DEFINÍCIÓ, INDIREKT BIZONYÍTÁS MN1841GA

6.1. Teljes indukció

6.1. Feladat. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy tetszőleges n természetes számra

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

teljesül. Bizonyítsuk az állítást a Gauss-féle gondolatmenet alapján is (teljes indukció nélkül).

6.2. Feladat. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy tetszőleges n természetes számra

$$1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$$

teljesül. Bizonyítsuk az állítást „geometriai” eszközökkel is (teljes indukció nélkül).

6.3. Feladat. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy tetszőleges n természetes számra

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

teljesül.

6.4. Feladat. Hol a hiba a következő bizonyításban?

Állítás: Bármely $n \in \mathbb{N}$ -re $a^{n-1} = 1$, ahol a tetszőleges pozitív valós szám.

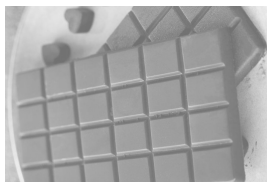
Bizonyítás: Ha $n = 1$, akkor $a^{n-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz tetszőleges olyan $k \in \mathbb{N}$ esetén, ahol $1 \leq k \leq n$. Ekkor $(n+1)$ -re a következőt kapjuk:

$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \cdot a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

Tehát az állítás igaz $(n+1)$ -re is.

6.5. Feladat. Egy tábla csokoládét szeretnénk teljesen feldarabolni, ahol a tábla $m \times n$ kisebb „kockából” áll. Minimum hány törésre van szükség?



6.6. Feladat. Igazoljuk, hogy $4 \mid 7^n + 3^{n+1}$ teljesül tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén. (Azaz 4 osztója $7^n + 3^{n+1}$ -nek tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén.)

6.7. Feladat. Igazoljuk, hogy $7 \mid 2^{n+2} + 3^{2n+1}$ teljesül tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén. (Azaz 7 osztója $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ -nek tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén.)

6.8. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges n természetes számra

$$\sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = n^3$$

teljesül.

6.9. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n természetes számra

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

6.10. Feladat. Legyen H a természetes számok részhalmazainak olyan halmaza, amely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy ha $A_1, A_2 \in H$, akkor $A_1 \cap A_2$ is H -ban van. Mutassuk meg, hogy tetszőleges n természetes számra, ha $A_1, \dots, A_n \in H$, akkor az

$$A_1 \cap \dots \cap A_n$$

halmaz is eleme H -nak.

6.2. Rekurzív definíció

6.11. Feladat. Az a_n ($n \in \mathbb{N}$) sorozat elemeit az alábbi rekurzió definiálja:

$$a_1 = 2, \quad a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Mutassuk meg, hogy $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

6.12. Feladat. Az a_n ($n \in \mathbb{N}$) sorozat elemeit az alábbi rekurzió definiálja:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 8, \quad a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 3).$$

Mutassuk meg, hogy $a_n = 3^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

6.13. Feladat. Definiáljuk rekurzív módon az $a_n = 3n + 2$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozatot.

6.14. Feladat. Definiáljuk rekurzív módon az $a_n = n^2 + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozatot.

6.15. Feladat. Tegnap kisebb sérülést szenvedtem, ezért az emeletre vezető lépcsőn csak úgy tudok felmenni, hogy egyet vagy kettőt lépek. Hányféleképpen mehetek fel a lépcsőn, ha annak 15 lépcsőfoka van?

6.16. Feladat. Az előző feladatban szereplő lépcsőn szeretnék ismét felmenni, de már meggyógyultam, így hármat is tudok lépni. Hányféleképpen mehetek fel a lépcsőn?

6.17. Feladat. Legyen $f(1) = f(2) = 1$, valamint $n \geq 2$ esetén

$$f(n) = \begin{cases} n - f\left(\frac{n}{2}\right), & \text{ha } n \text{ páros} \\ f\left(\frac{n-1}{2}\right) + f\left(\frac{n+1}{2}\right), & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg $f(3), \dots, f(12)$ értékét. Mivel egyenlő $f(2025)$?

6.18. Feladat. Legyen $a_1 = 2$ és $a_n = 3a_{n-1} + 4$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$). Találjuk meg a sorozat zárt (nem rekurzív) alakját, vagyis adjunk meg képletet a_n -re n függvényében.

6.3. Indirekt bizonyítás

6.19. Feladat. Mutassuk meg, hogy végtelen sok prímszám van.

6.20. Feladat. Mutassuk meg, hogy $\sqrt{2}$ nem racionális szám.

6.21. Feladat. Indirekt módon bizonyítsuk be, hogy a $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg q)$ formula logikai értéke mindig igaz.

6.22. Feladat. Indirekt módon bizonyítsuk be, hogy a $(p \vee q) \rightarrow ((p \vee \neg q) \rightarrow p)$ formula logikai értéke mindig igaz.

6.23. Feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges n természetes számra, ha $4^n - 1$ prímszám, akkor n páratlan.

6.24. Feladat. Mutassuk meg, hogy négy egymást követő természetes szám szorzata nem lehet négyzetszám.