
MATEMATIKA INFORMATIKUSOKNAK 1. (DiMat1)

6. FELADATSOR

TELJES INDUKCIÓ, REKURZÍV DEFINÍCIÓ, INDIREKT BIZONYÍTÁS

MN1841GA

A 6. feladatsor feladatainak megoldása

6.1. Teljes indukció

6.1. Feladat. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy tetszőleges n természetes számra

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

teljesül. Bizonyítsuk az állítást a Gauss-féle gondolatmenet alapján is (teljes indukció nélkül).

Megoldás. A teljes indukció kezdő lépése: $n = 1$ esetén az állítás igaz, mivel $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás, azaz $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Indukciós lépés: az állítás igazolása $(n+1)$ -re (az indukciós feltevés felhasználásával),

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (n+1) &= \underbrace{1 + 2 + \cdots + n}_{\frac{n(n+1)}{2} \text{ (ind. felt.)}} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

Azaz az állítás $(n+1)$ -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül a feladatban szereplő egyenlőség.

Megoldás a Gauss-féle gondolatmenet alapján. Legyen $\sigma = 1 + 2 + \cdots + n$. Ekkor

$$\begin{aligned} \sigma + \sigma &= (1 + 2 + \cdots + n) + (n + (n-1) + \cdots + 1) \\ &= (1 + n) + (2 + (n-1)) + \cdots + (n + 1) \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

következtében $\sigma = \frac{n(n+1)}{2}$.

6.2. Feladat. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy tetszőleges n természetes számra

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

teljesül. Bizonyítsuk az állítást „geometriai” eszközökkel is (teljes indukció nélkül).

Megoldás. A teljes indukció kezdő lépése: $n = 1$ esetén az állítás igaz, mivel $1 = 1^2$.

Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás, azaz $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

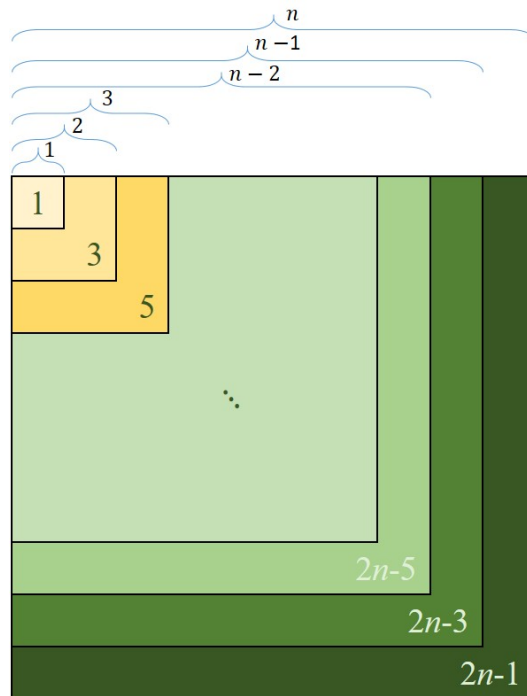
Indukciós lépés: az állítás igazolása $(n + 1)$ -re (az indukciós feltevés felhasználásával),

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + (2n + 1) &= \underbrace{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}_{n^2 \text{ (ind. felt.)}} + (2n + 1) \\ &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2. \end{aligned}$$

Azaz az állítás $(n + 1)$ -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül a feladatban szereplő egyenlőség.

Megoldás „geometriai” eszközökkel. Ld. 1. ábra.



1. ábra. Megoldás „geometriai” eszközökkel

6.3. Feladat. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy tetszőleges n természetes számra

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

teljesül.

Megoldás. A teljes indukció kezdő lépése: $n = 1$ esetén az állítás igaz, mivel $1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$.

Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás, azaz $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Indukciós lépés: az állítás igazolása $(n+1)$ -re (az indukciós feltevés felhasználásával),

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 &= \underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ (ind. felt.)}} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{6} \cdot (n(2n+1) + 6(n+1)) \\ &= \frac{n+1}{6} \cdot \underbrace{(2n^2 + 7n + 6)}_{(n+2)(2n+3)} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

Azaz az állítás $(n+1)$ -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül a feladatban szereplő egyenlőség.

↪ videó: [6.3. Feladat](#)

6.4. Feladat. Hol a hiba a következő bizonyításban?

Állítás: Bármely $n \in \mathbb{N}$ -re $a^{n-1} = 1$, ahol a tetszőleges pozitív valós szám.

Bizonyítás: Ha $n = 1$, akkor $a^{n-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$ tetszőleges a pozitív valós számra.

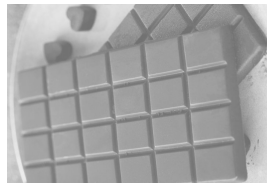
Tegyük fel, hogy az állítás igaz tetszőleges olyan $k \in \mathbb{N}$ esetén, ahol $1 \leq k \leq n$. Ekkor $(n+1)$ -re a következőt kapjuk:

$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \cdot a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

Tehát az állítás igaz $(n+1)$ -re is.

Megoldás. A bizonyításban az indukciós lépésnél van a hiba, ugyanis $n = 1$ esetén a tört nevezőjében $a^{1-2} = a^{-1}$ szerepel, ami egyrészt nem esik az indukciós feltevés hatókörébe, másrészt $a^{1-2} = a^{-1} = 1$ nem teljesül tetszőleges a pozitív valós szám esetén.

6.5. Feladat. Egy tábla csokoládét szeretnénk teljesen feldarabolni, ahol a tábla $m \times n$ kisebb „kockából” áll. Minimum hány törésre van szükség?



Megoldás. Kezdetben 1 darabunk van, a cél mn darab „kocka”. Minden törés legfeljebb 1-gyel növeli a darabok számát (egy darabot két részre választ). Ezért legalább $mn - 1$ törés kell.

Például először törjük a táblát m csíkra ($m - 1$ törés), majd minden csíkot törjük n kockára ($m(n - 1)$ törés). Összesen $(m - 1) + m(n - 1) = mn - 1$ törés. Így az alsó korlát elérhető, tehát ez a minimum.

6.6. Feladat. Igazoljuk, hogy $4 \mid 7^n + 3^{n+1}$ teljesül tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén. (Azaz 4 osztója $7^n + 3^{n+1}$ -nek tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén.)

Megoldás. A teljes indukció kezdő lépése: $n = 0$ esetén az állítás igaz, mivel $7^0 + 3^{0+1} = 4$ osztható 4-gyel.

Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás, azaz $4 \mid 7^n + 3^{n+1}$.

Indukciós lépés: az állítás igazolása $(n + 1)$ -re (az indukciós feltevés felhasználásával). Mivel

$$7^{n+1} + 3^{(n+1)+1} = 7 \cdot 7^n + 3 \cdot 3^{n+1} = 7 \cdot \underbrace{(7^n + 3^{n+1})}_{4 \mid (\text{ind. felt.})} - \underbrace{4 \cdot 3^{n+1}}_{4 \mid},$$

ezért $4 \mid 7^{n+1} + 3^{(n+1)+1}$, azaz az állítás $(n + 1)$ -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül az állítás.

6.7. Feladat. Igazoljuk, hogy $7 \mid 2^{n+2} + 3^{2n+1}$ teljesül tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén. (Azaz 7 osztója $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ -nek tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén.)

Megoldás. A teljes indukció kezdő lépése: $n = 0$ esetén az állítás igaz, mivel $2^{0+2} + 3^{2 \cdot 0+1} = 7$ osztható 7-tel.

Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás, azaz $7 \mid 2^{n+2} + 3^{2n+1}$.

Indukciós lépés: az állítás igazolása $(n + 1)$ -re (az indukciós feltevés felhasználásával). Mivel

$$2^{(n+1)+2} + 3^{2(n+1)+1} = 2 \cdot 2^{n+2} + 9 \cdot 3^{2n+1} = 2 \cdot \underbrace{(2^{n+2} + 3^{2n+1})}_{7 \mid (\text{ind. felt.})} + \underbrace{7 \cdot 3^{2n+1}}_{7 \mid},$$

ezért $7 \mid 2^{(n+1)+2} + 3^{2(n+1)+1}$, azaz az állítás $(n + 1)$ -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül az állítás.

↔ **videó:** [6.7. Feladat](#)

6.8. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges n természetes számra

$$\sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = n^3$$

teljesül.

Megoldás. A teljes indukció kezdő lépése: $n = 1$ esetén az állítás igaz, mivel

$$\sum_{k=1}^1 (3k^2 - 3k + 1) = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 = 1^3.$$

Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás, azaz

$$\sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = n^3.$$

Indukciós lépés: az állítás igazolása $(n + 1)$ -re (az indukciós feltevés felhasználásával),

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} (3k^2 - 3k + 1) &= \underbrace{\sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1)}_{n^3 \text{ (ind. felt.)}} + (3(n+1)^2 - 3(n+1) + 1) \\ &= n^3 + (3n^2 + 3n + 1) \\ &= (n+1)^3.\end{aligned}$$

Azaz az állítás $(n + 1)$ -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül a feladatban szereplő egyenlőség.

6.9. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n természetes számra

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Megoldás. Az állítást n szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

1. Ha $n = 1$, akkor $1^3 = 1 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$; ezért az állítás $n = 1$ esetén teljesül.
2. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $(n - 1)$ -re valamely $n - 1 \geq 1$ esetén, azaz

$$1^3 + \dots + (n - 1)^3 = \left(\frac{(n - 1)n}{2} \right)^2.$$

3. Tekintsük az állítást n -re:

$$\begin{aligned}1^3 + 2^3 + \dots + (n - 1)^3 + n^3 &= \underbrace{(1^3 + \dots + (n - 1)^3)}_{\left(\frac{(n-1)n}{2} \right)^2 \text{ (ind. felt.)}} + n^3 \\ &= \left(\frac{(n-1)n}{2} \right)^2 + n^3 \\ &= \frac{(n-1)^2 n^2}{4} + n^3 \\ &= n^2 \left(\frac{n^2 - 2n + 1}{4} + n \right) \\ &= n^2 \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{4} \right) \\ &= n^2 \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.\end{aligned}$$

Azaz az állítás n -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül az állítás.

Megjegyzés. Mivel $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, ezért az állítás úgy is megfogalmazható, hogy $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$ ($n \in \mathbb{N}$).

↪ videó: [6.9. Feladat](#)

6.10. Feladat. Legyen H a természetes számok részhalmazainak olyan halmaza, amely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy ha $A_1, A_2 \in H$, akkor $A_1 \cap A_2$ is H -ban van. Mutassuk meg, hogy tetszőleges n természetes számra, ha $A_1, \dots, A_n \in H$, akkor az

$$A_1 \cap \dots \cap A_n$$

halmaz is eleme H -nak.

Megoldás. *A teljes indukció kezdő lépése:* $n = 1$ esetén az állítás nyilvánvalóan igaz, mivel (egy darab H -beli halmaz esetén) az A_1 halmaz metszete A_1 . Az első „igazi” eset $n = 2$ esetén lép fel, és ekkor a H -ra vonatkozó feltétel miatt lesz igaz az állítás. (Ez utóbbi esetet az indukciós lépésben is használni fogjuk.)

Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás, azaz $A_1, \dots, A_n \in H$ esetén az

$$A_1 \cap \dots \cap A_n$$

halmaz is eleme H -nak.

Indukciós lépés: az állítás igazolása $(n + 1)$ -re (az indukciós feltevés felhasználásával). Legyen $A_1, \dots, A_{n+1} \in H$. Ekkor

$$A_1 \cap \dots \cap A_{n+1} = \underbrace{(A_1 \cap \dots \cap A_n)}_{\in H \text{ (ind. felt.)}} \cap A_{n+1} \in H,$$

mivel $A_1 \cap \dots \cap A_n \in H$ és $A_{n+1} \in H$, így alkalmazható a H -ra vonatkozó feltevésünk. Azaz az állítás $(n + 1)$ -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül az állítás.

6.2. Rekurzív definíció

6.11. Feladat. Az a_n ($n \in \mathbb{N}$) sorozat elemeit az alábbi rekurzió definiálja:

$$a_1 = 2, \quad a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Mutassuk meg, hogy $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

Megoldás. Az állítást n szerinti teljes indukcióval igazolhatjuk.

A teljes indukció kezdő lépése: $n = 1$ esetén az állítás igaz, mivel $a_1 = 2 = 3 \cdot 2^{1-1} - 1$.

Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás, azaz $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$.

Indukciós lépés: az állítás igazolása $(n + 1)$ -re (az indukciós feltevés felhasználásával). Mivel

$$a_{n+1} = 2 \cdot \underbrace{a_n}_{3 \cdot 2^{n-1} - 1 \text{ (ind. felt.)}} + 1 = 2 \cdot (3 \cdot 2^{n-1} - 1) + 1 = 6 \cdot 2^{n-1} - 1 = 3 \cdot 2^n - 1,$$

ezért az állítás $(n + 1)$ -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül az állítás.

6.12. Feladat. Az a_n ($n \in \mathbb{N}$) sorozat elemeit az alábbi rekurzió definiálja:

$$a_1 = 2, a_2 = 8, a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 3).$$

Mutassuk meg, hogy $a_n = 3^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

Megoldás. Az állítást n szerinti teljes indukcióval igazolhatjuk.

A teljes indukció kezdő lépése: $n = 1$ és $n = 2$ esetén az állítás igaz, mivel $a_1 = 2 = 3^1 - 1$ és $a_2 = 8 = 3^2 - 1$.

Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy $k \leq n$ esetén igaz az állítás, azaz $a_k = 3^k - 1$, ha $1 \leq k \leq n$.

Indukciós lépés: az állítás igazolása $(n + 1)$ -re (az indukciós feltevés felhasználásával). Mivel

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4 \cdot \underbrace{a_n}_{3^n - 1 \text{ (ind. felt.)}} - 3 \cdot \underbrace{a_{n-1}}_{3^{n-1} - 1 \text{ (ind. felt.)}} \\ &= 4 \cdot (3^n - 1) - 3 \cdot (3^{n-1} - 1) \\ &= 4 \cdot 3^n - 3^n - 1 \\ &= 3^{n+1} - 1, \end{aligned}$$

ezért az állítás $(n + 1)$ -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül az állítás.

↪ **videó:** [6.12. Feladat](#)

6.13. Feladat. Definiáljuk rekurzív módon az $a_n = 3n + 2$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozatot.

Megoldás. A sorozat első eleme: $a_1 = 5$, továbbá $a_n = 3n + 2 = 3(n - 1) + 5 = 3(n - 1) + 2 + 3$, ezért $a_n = a_{n-1} + 3$.

6.14. Feladat. Definiáljuk rekurzív módon az $a_n = n^2 + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozatot.

Megoldás. A sorozat első eleme: $a_1 = 2$, továbbá $a_n = n^2 + 1 = (n - 1)^2 + 2n = (n - 1)^2 + 1 - 1 + 2n$, ezért $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$.

6.15. Feladat. Tegnap kisebb sérülést szenvedtem, ezért az emeletre vezető lépcsőn csak úgy tudok felmenni, hogy egyet vagy kettőt lépek. Hányféleképpen mehetek fel a lépcsőn, ha annak 15 lépcsőfoka van?

Megoldás. Tekintsük általában a feladatot, azaz n lépcsőfok esetén. Ekkor az első lépésben vagy egyet lépek (és marad még $n - 1$) vagy kettőt lépek (és marad még $n - 2$). Jelölje L_n a lehetséges felmenések számát n lépcsőfok esetén. Ekkor az előbbiek szerint $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, valamint $L_1 = 1$ és $L_2 = 2$. A feladatra adott válasz $L_{15} = 987$.

↪ **videó:** [6.15. Feladat](#)

6.16. Feladat. Az előző feladatban szereplő lépcsőn szeretnék ismét felmenni, de már meggyógyultam, így hármat is tudok lépni. Hányféleképpen mehetek fel a lépcsőn?

Megoldás. Az előző feladathoz hasonlóan gondolkodhatunk, de most az első lépés háromféle lehet. A rekurziós összefüggés: $L'_n = L'_{n-1} + L'_{n-2} + L'_{n-3}$, és $L'_1 = 1$, $L'_2 = 2$, $L'_3 = 4$. A feladat megoldása: $L'_{15} = 5768$.

6.17. Feladat. Legyen $f(1) = f(2) = 1$, valamint $n \geq 2$ esetén

$$f(n) = \begin{cases} n - f\left(\frac{n}{2}\right), & \text{ha } n \text{ páros} \\ f\left(\frac{n-1}{2}\right) + f\left(\frac{n+1}{2}\right), & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg $f(3), \dots, f(12)$ értékét. Mivel egyenlő $f(2025)$?

Megoldás. A definíció alapján számolhatjuk az $f(3), \dots, f(12)$ értékeket:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(k)$	1	1	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8

Továbbá, $f(2025) = 1350$, mivel

$$\begin{aligned} f(2025) &= f(1012) + f(1013) \\ &= (1012 - f(506)) + (f(506) + f(507)) = 1012 + f(507) \\ &= 1012 + (f(253) + f(254)) \\ &= 1012 + (f(126) + f(127)) + (254 - f(127)) = 1266 + f(126) \\ &= 1266 + (126 - f(63)) = 1392 - (f(31) + f(32)) \\ &= 1392 - ((f(15) + f(16)) + (32 - f(16))) = 1360 - f(15) \\ &= 1360 - (f(7) + f(8)) = 1350. \end{aligned}$$

Teljes indukcióval igazolhatjuk a táblázat alapján sejthető szabályt:

$$f(3k+1) = f(3k+2) = 2k+1 \quad \text{és} \quad f(3k+3) = 2(k+1) \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

6.18. Feladat. Legyen $a_1 = 2$ és $a_n = 3a_{n-1} + 4$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$). Találjuk meg a sorozat zárt (nem rekurzív) alakját, vagyis adjunk meg képletet a_n -re n függvényében.

Megoldás. Számoljuk ki a sorozat első néhány elemét:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 3a_1 + 4 = 10, \quad a_3 = 3a_2 + 4 = 34, \quad a_4 = 3a_3 + 4 = 106, \quad a_5 = 3a_4 + 4 = 322.$$

Vegyük észre, hogy

$$2 = 4 \cdot 3^0 - 2, \quad 10 = 4 \cdot 3^1 - 2, \quad 34 = 4 \cdot 3^2 - 2, \quad 106 = 4 \cdot 3^3 - 2 \quad \text{és} \quad 322 = 4 \cdot 3^4 - 2.$$

Ezért azt sejtjük, hogy $a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2$ teljesül tetszőleges n természetes számra. Sejtésünket n szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

1. Korábbi számolásunk szerint a sejtésben megfogalmazott állítás igaz az $n = 1, 2, 3, 4, 5$ természetes számokra.
2. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $(n-1)$ -re valamely $n-1 \geq 5$ esetén, azaz

$$a_{n-1} = 4 \cdot 3^{n-2} - 2.$$

3. Tekintsük az állítást n -re:

$$\begin{aligned} a_n &= 3 \cdot \underbrace{a_{n-1}}_{4 \cdot 3^{n-2} - 2 \text{ (ind. felt.)}} + 4 \\ &= 3 \cdot (4 \cdot 3^{n-2} - 2) + 4 \\ &= (4 \cdot 3^{n-1} - 6) + 4 \\ &= 4 \cdot 3^{n-1} - 2. \end{aligned}$$

Azaz az állítás n -re is igaz.

Ezért a teljes indukció elve alapján, tetszőleges n természetes számra teljesül az állítás.

↗ **videó:** [6.18. Feladat](#)

6.3. Indirekt bizonyítás

6.19. Feladat. Mutassuk meg, hogy végtelen sok prímszám van.

Megoldás. Tegyük fel, hogy véges sok prímszám van, legyenek ezek $p_1, \dots, p_n$. Tekintsük az $N = p_1 \dots p_n + 1$ természetes számot. Mivel $N \geq 2$, ezért felírható prímszámok szorzataként: $N = q_1 \dots q_m$. Azonban, q_1 különbözik a $p_1, \dots, p_n$ prímszámok mindegyikétől, mivel $p_1, \dots, p_n \nmid N$, de $q_1 \mid N$. Ez ellentmond annak, hogy $p_1, \dots, p_n$ az összes prímszám. Tehát feltevésünk, miszerint véges sok prímszám van, nem volt helyes.

6.20. Feladat. Mutassuk meg, hogy $\sqrt{2}$ nem racionális szám.

Megoldás. Tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális szám, azaz $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, ahol $a, b \in \mathbb{N}$ relatív prímelek, azaz a legnagyobb közös osztójuk 1. Ekkor

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = \frac{a}{b} &\iff a = b\sqrt{2} \\ &\iff a^2 = 2b^2 \end{aligned}$$

következtében a páros egész szám, pl. $a = 2c$ ($c \in \mathbb{N}$). Így

$$(2c)^2 = 2b^2 \iff 2c^2 = b^2,$$

aminek következtében b is páros egész szám. Ellentmondást kaptunk, mivel feltevésünk szerint a és b relatív prímelek. Így az a feltevésünk, hogy $\sqrt{2}$ racionális szám, nem volt helyes.

6.21. Feladat. Indirekt módon bizonyítsuk be, hogy a $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg q)$ formula logikai értéke mindig igaz.

Megoldás. Tegyük fel, hogy vannak olyan $p_0, q_0 \in \{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}$ igazságértékek, hogy $(p_0 \rightarrow q_0) \vee (p_0 \rightarrow \neg q_0)$ hamis. Ekkor $p_0 \rightarrow q_0$ és $p_0 \rightarrow \neg q_0$ is hamis, ugyanis $A \vee B$ pontosan akkor hamis, ha A és B is hamis. Felhasználva azt, hogy $A \rightarrow B$ pontosan akkor hamis, ha A igaz és B hamis, azt kapjuk, hogy

$$p_0 \rightarrow q_0 \text{ hamis} \iff p_0 \text{ igaz és } q_0 \text{ hamis}$$

és

$$\begin{aligned} p_0 \rightarrow \neg q_0 \text{ hamis} &\iff p_0 \text{ igaz és } \neg q_0 \text{ hamis,} \\ &\iff p_0 \text{ igaz és } q_0 \text{ igaz.} \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy q_0 -nak igaznak és hamisnak kell lennie egyszerre, ez azonban nem teljesülhet, ellentmondásba ütköztünk. Tehát feltevésünk, miszerint a $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg q)$ formula vehet fel hamis értékeket is, nem volt helyes.

6.22. Feladat. Indirekt módon bizonyítsuk be, hogy a $(p \vee q) \rightarrow ((p \vee \neg q) \rightarrow p)$ formula logikai értéke mindig igaz.

Megoldás. Tegyük fel, hogy vannak olyan $p_0, q_0 \in \{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}$ igazságértékek, hogy $(p_0 \vee q_0) \rightarrow ((p_0 \vee \neg q_0) \rightarrow p_0)$ logikai értéke hamis. Ekkor $p_0 \vee q_0$ igaz és $(p_0 \vee \neg q_0) \rightarrow p_0$ hamis, ugyanis $A \rightarrow B$ pontosan akkor hamis, ha A igaz és B hamis. Mivel $p_0 \vee q_0$ több esetben is vehet fel igaz értéket, így érdemes azt vizsgálni, hogy $(p_0 \vee \neg q_0) \rightarrow p_0$ mikor hamis. Ismét implikáció a legkülső művelet, tehát $p_0 \vee \neg q_0$ logikai értéke igaz, és p_0 hamis, így $\neg q_0$ -nak igaz logikai értéket kell felvenni, azaz q_0 hamis. Ebből viszont az következik, hogy $p_0 \vee q_0$ is hamis lesz, ami ellentmond annak, hogy a $(p_0 \vee q_0) \rightarrow ((p_0 \vee \neg q_0) \rightarrow p_0)$ formulában az előtag, azaz $p_0 \vee q_0$ logikai értéke igaz. Tehát feltevésünk, miszerint a $(p \vee q) \rightarrow ((p \vee \neg q) \rightarrow p)$ formula vehet fel hamis értékeket is, nem volt helyes.

6.23. Feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges n természetes számra, ha $4^n - 1$ prímszám, akkor n páratlan.

Megoldás. Tegyük fel, hogy $4^n - 1$ prímszám és n nem páratlan. Ekkor n páros, pl. $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$), így

$$4^n - 1 = 4^{2m} - 1 = (4^m)^2 - 1 = (4^m - 1)(4^m + 1),$$

ami ellentmond annak, hogy $4^n - 1$ prímszám, mivel $4^m \pm 1 \geq 2$. Tehát feltevésünk, hogy n páros nem volt helyes.

→ videó: [6.23. Feladat](#)

6.24. Feladat. Mutassuk meg, hogy négy egymást követő természetes szám szorzata nem lehet négyzetszám.

Megoldás. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz. Legyen n olyan természetes szám, amelyre $n(n+1)(n+2)(n+3)$ négyzetszám, $n(n+1)(n+2)(n+3) = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$). Ekkor $n(n+2) = n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1$ és $(n+1)(n+3) = n^2 + 4n + 3 = (n+2)^2 - 1$ következtében

$$m^2 = n(n+1)(n+2)(n+3) = (n(n+2))((n+1)(n+3)) < (n+1)^2(n+2)^2 = ((n+1)(n+2))^2,$$

így $m < (n+1)(n+2)$. Mivel $n(n+1)(n+2)(n+3) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ és $((n+1)(n+2) - 1)^2 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$, ezért $m < (n+1)(n+2) - 1$. Azonban, $((n+1)(n+2) - 2)^2 = (n^2 + 3n)^2 = n^4 + 6n^3 + 9n^2 < m^2$ következtében $(n+1)(n+2) - 2 < m$. Így az

$$(n+1)(n+2) - 2 < m < (n+1)(n+2) - 1$$

ellentmondást kapjuk, mivel m egész szám.

→ videó: [6.24. Feladat](#)