
MATEMATIKA INFORMATIKUSOKNAK 1. (DiMat1)

4. FELADATSOR

RELÁCIÓK

MN1841GA

4.1. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $\alpha, \beta \subseteq A \times A$ relációk, melyre

$$\alpha = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (4, 4), (5, 5)\} \quad \text{és} \quad \beta = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 3), (4, 5)\}.$$

Határozzuk meg a következő relációkat:

- (a) $\alpha \cap \beta$, (b) $\alpha \setminus \beta$, (c) α^{-1} , (d) $\beta \cap \alpha^{-1}$.

4.2. Feladat. Tekintsük a következő relációkat. ($\mathbb{E}$ az emberek halmazát jelöli.)

$$\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x \text{ az } y \text{ gyermeke}\}, \quad \beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}, \quad \gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}.$$

Határozzuk meg a következő relációkat:

- (a) α^{-1} , (b) β^{-1} , (c) γ^{-1} , (d) $\beta \cap \gamma$.

4.3. Feladat. Adjuk meg a $H = \{-2, 1, 2, 3, 4\}$ halmazon értelmezett $\varrho = \{(a, b) : a \text{ osztója } b\text{-nek}\}$ reláció gráfját. Vizsgáljuk meg reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából.

4.4. Feladat. Adjunk meg a gráfjával az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon egy olyan relációt, amely

- (a) reflexív, tranzitív de nem szimmetrikus;
(b) antiszimmetrikus, tranzitív de nem dichotom;
(c) dichotom de nem reflexív.

4.5. Feladat. Vizsgáljuk meg az alábbi relációkat reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából. Ezek alapján állapítsuk meg, hogy melyik reláció ekvivalencia, részbenrendezés vagy teljes rendezés.

- (a) $\{(a, b) : |a - b| \leq 2\}$ a $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon,
(b) $\{(x, y) : x \leq y\}$ az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán,
(c) $\{(x, y) : x < y\}$ a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán,
(d) $\{(a, b) : ab \geq 0\}$ a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán,
(e) $\{(a, b) : a^2 \geq b^2\}$ az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán,
(f) $\{(x, y) : |x| = |y|\}$ a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán,
(g) $\{(x, y) : 2 \mid x + y\}$ a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazán,
(h) $\{(a, b) : 4 \mid b - a\}$ az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán,
(i) $\{(a, b) : a^2 < b^2\}$ az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán,
(j) $\{(X, Y) : X \cap \mathbb{Z} = Y \cap \mathbb{Z}\}$ a $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ halmazon.

4.6. Feladat. Adjon meg olyan osztályozást az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon, melynek három osztálya (blokkja) van. Adja meg az osztályozáshoz tartozó ekvivalenciarelációt.

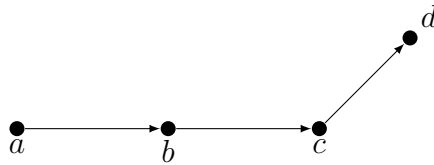
4.7. Feladat. Határozza meg a következő ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást.

- (a) $\{(a, b): ab > 0\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ halmazon
- (b) $\{(a, b): 3 \mid b - a\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon
- (c) $\{(H, G): |H| = |G|\}$ az $A = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{\emptyset\}, \{0\}, \{a, b\}, \{1, 2, 3\}\}$ halmazon
- (d) $\{(x, y): x\text{-nek és } y\text{-nak van közös prímosztója}\}$ az $A = \{2, 3, 8, 9, 14, 15, 19, 26\}$ halmazon
- (e) $\{(x, y): x \text{ és } y \text{ számjegyeinek összege egyenlő}\}$ az $A = \{71, 301, 216, 4, 121, 54, 602, 315\}$ halmazon
- (f) $\{(a, b): |a| = |b|\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
- (g) $\{(x, y): x^2 + y^2 \text{ páros}\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

4.8. Feladat. Adjuk meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját. Melyek a minimális, maximális, legkisebb és legnagyobb elemek?

- (a) $(A; \subseteq)$, ahol $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$,
- (b) $(B; \subseteq)$, ahol $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$,
- (c) $(C; \mid)$, ahol $C = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 24, 36\}$,
- (d) $(D; \mid)$, ahol $D = \{0, 1, 2, 4, 7, 14, 28, 32\}$,
- (e) $(E; \sqsubseteq)$, ahol $E = \{123, 211, 321, 467, 512, 861, 999\}$ és $a \sqsubseteq b$ pontosan akkor teljesül, ha a minden számjegye kisebb vagy egyenlő, mint b megfelelő számjegye,
- (f) $(F; \leq)$, ahol $F = \{(1, 1), (\frac{1}{2}, 2), (0, -1), (\frac{1}{3}, 3), (2, 2)\}$ és $\leq$ a komponensenkénti részbenrendezés.

4.9. Feladat. Adjuk meg a következő gráf által meghatározott ϱ reláció tranzitív lezártját.



4.10. Feladat. Legyen $\varrho = \{(a, b) \mid a - b = 2\}$ reláció az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon. Rajzoljuk fel a ϱ gráfját és adjuk meg ϱ tranzitív lezártját.

4.11. Feladat. Adjuk meg a következő relációk tranzitív lezártját:

- (a) $\{(a, b) \in A^2: |a - b| = 2\}$, ahol $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- (b) $\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2: a - b = 0\}$,
- (c) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2: b = a^2\}$,
- (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y - x = 1\}$.