
MATEMATIKA INFORMATIKUSOKNAK 1. (DiMat1)

3. FELADATSOR

HALMAZOK

MN1841GA

3.1. Feladat. Legyen az alaphalmaz $U = \{a, b, c, d, e\}$ és tekintsük a következő halmazokat: $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{d, e\}$ és $C = \{a, b, e\}$. Határozzuk meg a következő halmazok elemeit:

- (a) $A \cup B$, (b) $A \cap B$, (c) $\overline{B}$, (d) $A \setminus B$,
 (e) $A \triangle B$, (f) $(A \triangle \overline{C}) \setminus \overline{B}$, (g) $\mathcal{P}(B)$.

3.2. Feladat. Legyen $A = \mathcal{P}(\{a, b\})$ és $B = \mathcal{P}(\{b, c\})$. Határozzuk meg a következő halmazok elemeit:

- (a) $A \cup B$, (b) $A \cap B$, (c) $A \setminus B$, (d) $B \setminus A$,
 (e) $A \triangle B$.

3.3. Feladat. Legyen $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Döntsük el, hogy az alábbiak közül melyik igaz és melyik hamis.

- (a) $\emptyset \in A$, (b) $\emptyset \subseteq A$, (c) $\{\emptyset\} \in A$, (d) $\{\emptyset\} \subseteq A$,
 (e) $\{\{\emptyset\}\} \in A$, (f) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$, (g) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A$, (h) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$.

3.4. Feladat. Határozzuk meg a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ halmaz elemeit.

3.5. Feladat. Döntsük el, hogy az $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz hatványhalmazának alábbi részhalmazai osztályozásai-e az A halmaznak.

- (a) $\mathcal{C}_1 = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, e, f\}\}$, (b) $\mathcal{C}_2 = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f\}\}$,
 (c) $\mathcal{C}_3 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, c, e, f\}\}$, (d) $\mathcal{C}_4 = \{\emptyset, \{a, c, d\}, \{b, e, f\}\}$,
 (e) $\mathcal{C}_5 = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{b, e, f\}\}$, (f) $\mathcal{C}_6 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, f\}\}$.

3.6. Feladat. Adjunk meg az $\{1, 2, \dots, 7\}$ halmazon egy olyan osztályozást, melynek

- (a) legalább 3 osztálya van,
 (b) pontosan 3 osztálya van,
 (c) két osztálya van és mindegyik legalább kételemű,
 (d) három osztálya van és mindegyik legalább háromelemű.

3.7. Feladat. Döntsük el, hogy teljesülnek-e tetszőleges A, B, C halmazok esetén a következő egyenlőségek.

- (a) $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$, (b) $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$,
 (c) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$, (d) $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
 (e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, (f) $(A \cap B) \setminus (B \setminus (A \cup C)) = A \cap B$,
 (g) $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = A \cup B$

3.8. Feladat. Adjuk meg az $A \cup (B \cap (C \cup D))$ halmaz komplementerét az A, B, C, D halmazok és komplementereik segítségével.

3.9. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbiak közül melyik igaz és melyik nem igaz, tetszőleges olyan A, B halmazokra, amelyekre $A \cup B \subseteq B$.

- (a) $A \subseteq B$, (b) $A = B$, (c) $B \setminus A = \emptyset$.

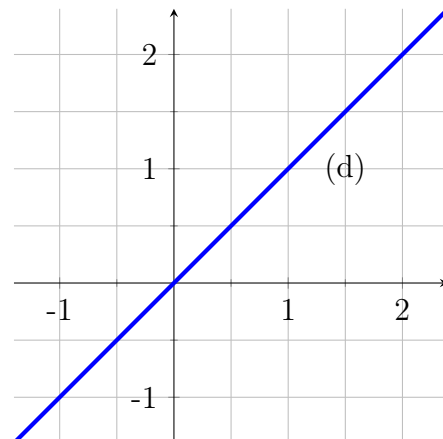
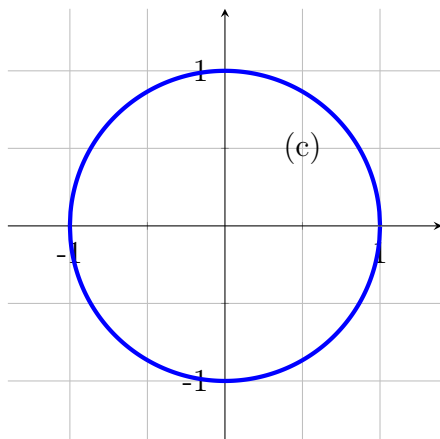
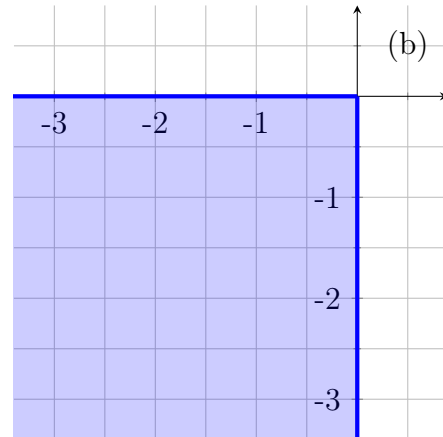
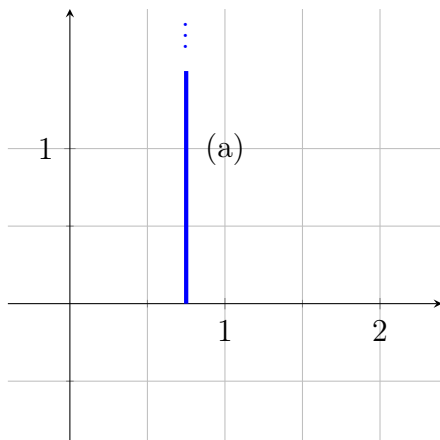
3.10. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C, D halmazokra teljesül, hogy

- (a) $(A \cup B) \cap (C \cup D) \supseteq (A \cap C) \cup (B \cap D)$,
 (b) $(A \cap C) \setminus (B \setminus (C \cup D)) \supseteq A \cap C \cap D$.

3.11. Feladat. Határozzuk meg az alábbi A és B halmazok esetén $(A \times B)$ -t. Ábrázoljuk a kapott halmazt Descartes-féle koordináta-rendszerben.

- (a) $A = \{1, 3\}$, $B = \{-1, 0, 2\}$, (b) $A = \{1, 3\}$, $B = [1; 3]$,
 (c) $A = (-1; 2]$, $B = [1; 3]$.

3.12. Feladat. Előállnak-e a következő (kék) ponthalmazok a valós számok részhalmazainak Descartes-szorzataként?



3.13. Feladat. Adjuk meg a következő bijektív leképezések inverzét.

- (a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = 3x - 1,$
- (b) $\beta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x\beta = \sqrt{x},$
- (c) $\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x\gamma = (x + 2)^2 - 4,$
- (d) $\delta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x\delta = (2x + 1)^2 - 1.$

3.14. Feladat. Adjunk meg bijektív leképezést az A halmazról a B halmazra a hozzárendelési szabály megadásával. Határozzuk meg a kapott bijektív leképezések inverzét.

- (a) $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 5, 7, 9\},$
- (b) $A = \{1, 2, 3, \dots\}, B = \{2, 3, 4, \dots\},$
- (c) $A = \{1, 2, 3, \dots\}, B = \{2, 4, 6, \dots\},$
- (d) $A = \mathbb{N}, B = \{\text{négyzetszámok}\}.$

3.15. Feladat. Adjunk meg bijektív leképezést a következő halmazok között, azaz igazoljuk, hogy a halmazok számossága megegyezik. (Az $(a; b)$ jelölést a valós számok a és b közötti nyitott intervallumára használjuk.)

- (a) $(0; 1)$ és $(-2; 3),$ (b) $(1; 6)$ és $(4; 7),$ (c) $(0; 1)$ és $\mathbb{R},$ (d) $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^+.$

3.16. Feladat. Döntsük el, hogy megadható-e $A \rightarrow B$ bijektív leképezés, azaz megegyezik-e az A és a B halmaz számossága.

- (a) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Z},$ (b) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Q},$ (c) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{R},$
- (d) $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, B = \mathbb{N},$ (e) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, B = \mathbb{Z},$ (f) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, B = \mathbb{R},$
- (g) $A = \mathbb{N}^3, B = \mathbb{Z},$ (h) $A = \mathbb{Q}^4, B = \mathbb{N}^2,$ (i) $A = \mathbb{R}^2, B = \mathbb{Z}^8.$

3.17. Feladat. Képzeljünk el egy szállodát, amelynek megszámlálhatóan végtelen sok szobája van, de már minden szoba foglalt.

- (a) Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki?
- (b) Újabb 999999 vendég érkezik. Hogyan lehetne őket elszállásolni?
- (c) A szomszéd utcában lévő hasonló végtelen szállodában tűz ütött ki, és onnan mindenki ebbe a szállodába menekül. Hogyan tudja őket elhelyezni a portás?