
MATEMATIKA INFORMATIKUSOKNAK 1. (DiMat1)

2. FELADATSOR

A PREDIKÁTUMKALKULUS ELEMEI

MN1841GA

2.1. Feladat. Legyen az individuumtartomány az egész számok halmaza. Vezessük be a következő jelöléseket:

- egyváltozós predikátumok:

$$M(x): „x \text{ négyzetszám}”, \quad P(x): „x \text{ páros szám}”, \quad N(x): „x \text{ negatív szám}”,$$

- kétváltozós predikátum:

$$O(x, y): „x \text{ osztója } y\text{-nak}”,$$

- kétváltozós függvények:

$$o(a, b) = a + b, \text{ azaz } a \text{ és } b \text{ szokásos összege}, \quad s(a, b) = a \cdot b, \text{ azaz } a \text{ és } b \text{ szokásos szorzata}.$$

Fordítsuk köznapi nyelvre az alábbi formulákat.

- | | |
|---|---|
| (a) $P(7)$, | (b) $M(4) \wedge \neg N(o(9, 3))$, |
| (c) $(\forall x)(O(2, s(4, x)))$, | (d) $(\exists x)(P(x) \wedge O(x, 6))$, |
| (e) $(\forall x)(O(4, x) \rightarrow P(x))$, | (f) $(\forall x)(\forall y)(P(o(x, y)) \leftrightarrow P(s(x, y)))$, |
| (g) $(\forall x)\left(M(x) \rightarrow (\exists y)(P(y) \wedge O(x, y))\right)$, | |
| (h) $(\forall x)(\forall y)(\neg P(s(x, y)) \leftrightarrow (\neg P(x) \vee \neg P(y)))$, | |
| (i) $(\exists x)\left(P(x) \wedge (\forall y)\left((P(y) \wedge N(y)) \rightarrow (\neg O(y, x))\right)\right)$. | |

2.2. Feladat. Legyen az individuumtartomány az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz, és legyen f az az egyváltozós függvényjel A -n, melyre

$$f(1) = 3, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 1, \quad f(4) = 2, \quad f(5) = 3.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$P(x, y): x + y = 5, \quad Q(x): x \text{ páros}, \quad E(x, y): x = y.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

- | | |
|--|---|
| (a) $(\forall x)(\exists y)(E(f(x), y))$, | (b) $(\forall x)(\exists y)(E(f(y), x))$, |
| (c) $(\exists x)(\forall y)(E(f(x), y))$, | (d) $(\exists x)(\forall y)(E(f(y), x))$, |
| (e) $(\forall x)(Q(x) \leftrightarrow Q(f(x)))$, | (f) $(\forall x)(\forall y)(\neg E(x, y) \rightarrow \neg E(f(x), f(y)))$, |
| (g) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x))$, | (h) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow \neg E(x, y))$, |
| (i) $(\forall x)(\forall y)((P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow E(x, y))$, | (j) $(\exists x)(\forall y)(\neg E(f(y), x))$, |
| (k) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow (Q(x) \leftrightarrow \neg Q(y)))$, | (l) $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$. |

2.3. Feladat. A szokásos módon, jelöljenek az ABC nagybetűi predikátumokat; a kisbetűi közül x , y és z változókat; a , b , c individuumkonstansokat; egyéb kisbetűi függvényjeleket. Az alábbi formulákban melyek a változók kötött illetve szabad előfordulásai?

- (a) $(\forall x)(K(x, y) \vee L(x))$,
- (b) $(\exists y)(I(s(x, y)) \leftrightarrow (\forall x)(O(x, y)))$,
- (c) $M(k(x, b), x) \wedge (\exists z)(M(y, k(z, a)))$,
- (d) $(\forall x)P(f(x, a), x) \rightarrow (\exists y)(P(f(y, x), y) \wedge Q(x))$.

2.4. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket. Az individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, függvényjelek és individuumkonstansok a következők:

$H(x)$: „ x hallgató”, $V(x)$: „ x felkészült a vizsgára”, $B(x, y)$: „ x az y barátja”,
 $C(x, y)$: „ x csoporttársa y -nak”, $T(x, y)$: „ x házastársa y -nak”, $F(x)$: „ x férfi”,
 $A(x)$: „ x anya”, p : „Péter”, $a(x)$: „ x anyja”,
 $S(x)$: „ x szeret főzni”.

- (a) Néhány hallgató nem készült fel a vizsgára.
- (b) Minden hallgató felkészült a vizsgára.
- (c) Néhány hallgatónak nincs barátja.
- (d) Bizonyos hallgatók csak a csoporttársaikkal házasodnak össze.
- (e) Vannak nőtlen férfiak.
- (f) Minden anya nő, de van olyan nő, aki nem anya.
- (g) Péter összes barátja hallgató.
- (h) Néhány hallgató anyja nem szeret főzni.
- (i) Péter anyja szeret főzni.

2.5. Feladat. Megfelelően választott predikátum- és függvényjelek segítségével formalizáljuk az alábbi mondatokat elsőrendű nyelven. Adjuk meg a kapott formula tagadását úgy, hogy negáció csak predikátumjelre vonatkozzon. Az individuumtartomány legyen az egész számok halmaza.

- (a) Minden egész számnak osztója az 1 és önmaga.
- (b) Minden egész számnál létezik kisebb.
- (c) Minden 10-zel osztható szám 0-ra végződik.
- (d) Van olyan negatív szám, amely négyzete pozitív.
- (e) Minden szám pozitív vagy negatív.

2.6. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban a következő ítéleteket. Adjuk meg a formulák tagadását is úgy, hogy kvantort nem tagadunk, és fogalmazzuk meg a megfelelő ítéletet köznapi nyelven. (Individuumtartomány az emberek halmaza.)

- (a) Minden informatikus éhes.
- (b) Ha egy szakács éhes, főz magának.
- (c) Az éhes informatikusok kedvelik a szakácsokat.
- (d) Van olyan szakács, aki csak informatikusnak főz.
- (e) Minden informatikus kedveli a neki főző szakácsokat.
- (f) Mészga Géza szerencsétlen, de gyermekei szerencsések.
- (g) Ha Mészga Géza szakács, és senki sem éhes, akkor mindenki szerencsés.