

# 10. Előadás

# Homogén lineáris egyenletrendszer (HLER)

**Definíció:** homogén lineáris egyenletrendszer (HLER).

Legyen  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^{1 \times m}$  és  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Az  $Ax^T = b^T$  lineáris egyenletrendszer **homogén**, ha  $b = (0, \dots, 0)$ . Azaz, ha lineáris egyenletrendszerünk

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 + \dots + a_{1,n} \cdot x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1} \cdot x_1 + \dots + a_{m,n} \cdot x_n = 0 \end{cases}$$

alakú.

**Jelölés.**

Az  $Ax^T = \underline{0}^T$  HLER megoldásainak halmazát  $U_A$ -val jelöljük.

## Megjegyzés.

Az  $Ax^T = \underline{0}^T$  HLER megoldásainak  $U_A$  halmaza az alábbi tulajdonságokkal bír:

- $\underline{0} \in U_A$  ( $\underline{0}$  a **triviális megoldása** a HLER-nek),
- ha  $c_1, c_2 \in U_A$ , akkor  $Ac_1^T = \underline{0}^T$  és  $Ac_2^T = \underline{0}^T$ , aminek következtében  $\underline{0}^T = \underline{0}^T + \underline{0}^T = Ac_1^T + Ac_2^T = A(c_1^T + c_2^T) = A(c_1 + c_2)^T$ , így  $c_1 + c_2 \in U_A$  ( $U_A$  zárt az összeadásra),
- ha  $c \in U_A$  és  $\lambda \in \mathbb{R}$ , akkor  $Ac^T = \underline{0}^T$ , aminek következtében  $\underline{0}^T = \lambda \cdot \underline{0}^T = \lambda \cdot (Ac^T) = A(\lambda \cdot c)^T$ , így  $\lambda \cdot c \in U_A$  ( $U_A$  zárt a skalárokkal való szorzásra).

**Tétel.**

Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak.

**Tétel.**

Lineáris egyenletrendszer megoldásai pontosan akkor alkotnak alteret, ha a lineáris egyenletrendszer homogén.

## Példa.

Tekintsük az

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

HLER-t. Határozzuk meg  $U_A$ -t, ahol  $A$  az egyenletrendszer mátrixa.

A HLER bővített mátrixának lépcsős alakja:

$$(A \mid \underline{0}) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

## Példa folyt.

- A bővített mátrix utolsó oszlopa az elemi átalakítások során nem változik, így akár el is hagyható.
- A lépcsős alakból MINDEN leolvasható: két kötött ( $x_1$  és  $x_3$ ) és két szabad ( $x_2$  és  $x_4$ ) változó van, továbbá

$$U_A = \{(-2x_2 - x_4, x_2, -x_4, x_4) : x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

- Az  $U_A$  altérben bázist kapunk, ha ügyesen választjuk meg a szabad változók értékét:
  - $x_2 = 1, x_4 = 0$ :  $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$ ,
  - $x_2 = 0, x_4 = 1$ :  $v_2 = (-1, 0, -1, 1)$ .

A  $v_1, v_2$  vektorrendszer bázis az  $U_A$  altérben, így dimenziója 2.

**Definíció:** fundamentális megoldásrendszer.

HLER megoldásai alterének bázisát a HLER **fundamentális megoldásrendszerének** nevezzük.

**Példa folyt.**

A  $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$ ,  $v_2 = (-1, 0, -1, 1)$  vektorrendszer bázis a megoldások alterében, azaz fundamentális megoldásrendszere az

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

HLER-nek.

## Tétel.

Legyen  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Az  $Ax^T = \underline{0}^T$  homogén lineáris egyenletrendszernek  $r = r(A)$  darab kötött és  $n - r$  darab szabad változója van, ezért az  $U_A$  altér dimenziója  $n - r$ . Ha a szabad változók  $x_{i_{r+1}}, \dots, x_{i_n}$ , akkor az alábbi  $(n - r)$ -esekhez tartozó

$$\begin{array}{llllll}
 x_{i_{r+1}} = 1 & x_{i_{r+2}} = 0 & \dots & x_{i_n} = 0 & v_1 = (\dots, 1, \dots, 0, \dots, 0, \dots) \\
 x_{i_{r+1}} = 0 & x_{i_{r+2}} = 1 & \dots & x_{i_n} = 0 & v_2 = (\dots, 0, \dots, 1, \dots, 0, \dots) \\
 & & & & \vdots \\
 x_{i_{r+1}} = 0 & x_{i_{r+2}} = 0 & \dots & x_{i_n} = 1 & v_{n-r} = (\dots, 0, \dots, 0, \dots, 1, \dots)
 \end{array}$$

megoldások fundamentális megoldásrendszert alkotnak. Azaz, ha a szabad változók helyébe ezeket az értékeket helyettesítjük, és meghatározzuk a kötött változók értékét, akkor ezek a konkrét megoldás-vektorok az  $U_A$  megoldástér egy bázisát alkotják.

## Példa.

Tekintsük az  $Ax^T = \underline{0}^T$  HLER-t, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 7 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 9 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -11 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 14 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Négy kötött ( $x_1, x_3, x_4, x_5$ ) és négy szabad ismeretlen van ( $x_2, x_6, x_7, x_8$ ), az  $U_A$  altér dimenziója  $n - r(A) = 8 - 4 = 4$ . A HLER megoldásterének bázisa:

$$\begin{aligned} x_2 = 1, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 0 &\rightsquigarrow v_1 = (-1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ x_2 = 0, x_6 = 1, x_7 = 0, x_8 = 0 &\rightsquigarrow v_2 = (11, 0, 0, -2, -14, 1, 0, 0), \\ x_2 = 0, x_6 = 0, x_7 = 1, x_8 = 0 &\rightsquigarrow v_3 = (1, 0, 0, 0, -5, 0, 1, 0), \\ x_2 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 1 &\rightsquigarrow v_4 = (3, 0, -2, -1, -6, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

## Példa.

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ , és  $Ax^T = \underline{0}^T$  homogén lineáris egyenletrendszer. Ekkor a következők teljesülnek:

- Az egyenletrendszer 4 egyenletből áll, és 5 ismeretlenes.
- Az egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak  $\mathbb{R}^5$ -ben, tehát a megoldásaltér ( $U_A$ ) legfeljebb 5 dimenziós.
- A megoldásaltér bázisa legfeljebb 5 elemű.
- Mivel a HLER kevesebb egyenletet tartalmaz, mint ismeretlent, mindig lesz szabad ismeretlen.
- Ha  $r(A) = 3$ , akkor 3 kötött ismeretlen van.
- Ha  $r(A) = 3$ , akkor 2 szabad ismeretlen van, így a megoldásaltér bázisa 2 elemű, azaz  $U_A$  2 dimenziós.

## Megjegyzés

Ha  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  és  $|A| \neq 0$ , akkor  $r(A) = n$ . Ebben az esetben az  $Ax^T = \underline{0}^T$  HLER esetén minden ismeretlen kötött, tehát egyetlen megoldása a  $\underline{0}$  vektor.

## Példa.

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ , és  $Ax^T = \underline{0}^T$  homogén lineáris egyenletrendszer. Ekkor a következők teljesülnek:

- Ha  $|A| \neq 0$ , akkor csak triviális megoldása van az egyenletrendszernek.
- Ha  $|A| \neq 0$ , akkor nincs szabad ismeretlen.
- Ha  $|A| \neq 0$ , akkor a megoldásaltér 0 dimenziós.
- Ha  $|A| \neq 0$ , akkor a megoldásaltér 1 elemű.
- Ha  $|A| = 0$ , akkor van szabad ismeretlen.
- Ha  $|A| = 0$ , akkor a megoldásaltér legalább 1 dimenziós.
- Ha  $|A| = 0$ , akkor a megoldásaltér bázisa legalább 1 elemű.

**Tétel.**

Legyen  $U$  altér a  $V = \mathbb{R}^n$  vektortérben. Ekkor van olyan  $v_1, \dots, v_k \in V$  vektorok, amelyekre  $U = [v_1, \dots, v_k]$  teljesül.

**Példa.**

Legyen  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Ekkor  $U_A$  altér az  $\mathbb{R}^4$  vektortérben,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ahogy korábbi példában már láttuk, ekkor  $U_A$  bázisa a

$$v_1 = (-2, 1, 0, 0), v_2 = (-1, 0, -1, 1)$$

vektorrendszer, ezért

$$U_A = [v_1, v_2].$$

**Tétel.**

Legyen  $U$  altér a  $V = \mathbb{R}^n$  vektortérben. Ekkor vannak olyan  $m$  természetes szám és  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , hogy  $U = U_A$ .

**Példa.**

Legyen  $U = \{(a, b, c, d) : a = b - 2c \text{ és } c = d - a + b\}$ . Ekkor  $U$  altér az  $\mathbb{R}^4$  vektortérben és

$$\begin{aligned} U &= \{(a, b, c, d) : a = b - 2c \text{ és } c = d - a + b\} \\ &= \{(a, b, c, d) : a - b + 2c = 0 \text{ és } a - b + c - d = 0\} = U_A, \end{aligned}$$

$$\text{ahol } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Sajátérték, sajátvektor

## Definíció: mátrix sajátértéke.

Legyen  $n \in \mathbb{N}$ . Az  $A$  ( $n \times n$ )-es valós mátrixnak **sajátértéke** a  $\lambda$  valós szám, ha van olyan  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq \underline{0}$  vektor, melyre  $A \cdot v^T = \lambda \cdot v^T$  teljesül ( $\rightsquigarrow v$  a  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátvektor).

## Definíció: mátrix sajátvektora.

Legyen  $n \in \mathbb{N}$ . Az  $A$  ( $n \times n$ )-es valós mátrixnak **sajátvektora** a  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$  vektor, ha van olyan  $\lambda$  valós szám, melyre  $A \cdot v^T = \lambda \cdot v^T$  teljesül ( $\rightsquigarrow v$  a  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátvektor).

## Példa.

Legyen  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ , ekkor

- a  $\lambda = 3$  valós szám sajátértéke  $A$ -nak, mivel a  $v = (0, -1, 1)$  vektorra

$$A \cdot v^T = A \cdot (0, -1, 1)^T = (0, -3, 3)^T = 3 \cdot (0, -1, 1)^T = 3 \cdot v^T$$

teljesül.

- a  $v = (2, -3, 2)$  vektor sajátvektora  $A$ -nak, mivel

$$A \cdot v^T = A \cdot (2, -3, 2)^T = (2, -3, 2)^T = 1 \cdot (2, -3, 2)^T = 1 \cdot v^T.$$

A  $v$  vektor a  $\lambda = 1$  sajátértékhez tartozik.

## Megjegyzés (A sajátértékek meghatározása).

Tegyük fel, hogy a  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  vektor sajátvektora az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixnak, mégpedig a  $\lambda \in \mathbb{R}$  sajátértékhez tartozó sajátvektora. Ekkor

$$\begin{aligned} A \cdot v^T &= \lambda \cdot v^T \iff A \cdot v^T = \lambda \cdot E_n \cdot v^T \\ &\iff (A - \lambda \cdot E_n) \cdot v^T = 0^T. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy  $v$  **nemtriviális** megoldása az  $(A - \lambda \cdot E_n) \cdot x^T = 0^T$  HLER-nek. Ha  $|A - \lambda \cdot E_n| \neq 0$  teljesülne, akkor (a Cramer-szabály következtében) a HLER-nek pontosan egy megoldása lenne, a triviális ( $x = 0$ ). Így az  $A - \lambda \cdot E_n$  mátrix determinánsa 0.

## Tétel.

Az  $A$  mátrixnak a  $\lambda$  valós szám pontosan akkor sajátértéke, ha  $|A - \lambda \cdot E_n| = 0$ .

**Definíció:** karakterisztikus polinom.

Legyen  $n \in \mathbb{N}$  és  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . A  $p_A = |A - \lambda \cdot E_n|$  polinomot az  $A$  mátrix **karakterisztikus polinomjának** nevezzük.

**Tétel** (A sajátértékek és a karakterisztikus polinom).

A  $\lambda$  valós szám pontosan akkor sajátértéke az  $A$  valós négyzetes mátrixnak, ha  $\lambda$  gyöke  $A$  karakterisztikus polinomjának.

## Példa.

Határozzuk meg az  $A = \begin{pmatrix} 35 & 45 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$  mátrix sajátértékeit.

Az  $A$  mátrix karakterisztikus polinomja:

$$\begin{aligned} p_A &= |A - \lambda \cdot E_2| = \left| \begin{pmatrix} 35 & 45 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 35 & 45 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 35 - \lambda & 45 \\ -6 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 37\lambda + 340. \end{aligned}$$

Az  $\lambda^2 - 37\lambda + 340 = 0$  egyenlet megoldásai: 20 és 17. Így  $A$  sajátértékei:  $\lambda_1 = 20$  és  $\lambda_2 = 17$ .

## Példa.

Határozzuk meg az  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  mátrix sajátértékeit.

Az  $A$  mátrix karakterisztikus polinomja:

$$p_A = |A - \lambda \cdot E_2| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Az  $\lambda^2 + 1 = 0$  egyenletnek nincs valós megoldása, ezért az  $A$  mátrixnak nincsenek valós sajátértékei.

## Megjegyzés

Tetszőleges  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix karakterisztikus polinomja  $n$ -ed fokú polinom, így legfeljebb  $n$  valós sajátértéke van  $A$ -nak.

**Definíció: sajátaltér.**

Valós mátrix adott sajátértékhez tartozó sajátvektorai a zérusvektorral együtt alteret alkotnak. Ezen altér az adott sajátértékhez tartozó **sajátaltér**. A  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátalteret  $U_\lambda$  jelöli.

**Tétel (Sajátaltér bázisa).**

Legyen  $n \in \mathbb{N}$  és  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Az  $A$  mátrix  $\lambda$  sajátértékéhez tartozó sajátalterének egy bázisa éppen az  $(A - \lambda \cdot E)x^T = \underline{0}^T$  HLER megoldásterének egy bázisa (azaz egy fundamentális rendszere).

## Példa.

Adjuk meg az  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$  mátrix sajátértékeit, és az egyik sajátértékéhez tartozó sajátalterét.

- Az  $A$  mátrix karakterisztikus polinomja:

$$\begin{aligned} p_A &= |A - \lambda \cdot E_3| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 5 & 5 \\ 0 & 3 - \lambda & 1 \\ 0 & -2 & 0 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)[(3 - \lambda)(-\lambda) - (-2)] = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = \\ &= (2 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 1) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1). \end{aligned}$$

- Az  $A$  mátrix sajátértékei:  $\lambda_1 = 2$  és  $\lambda_2 = 1$ .
- Meghatározzuk  $U_{\lambda_1}$ -et, azaz a  $\lambda_1 = 2$ -höz tartozó sajátalteret.

## Példa folyt.

Az  $U_{\lambda_1}$  sajátaltér meghatározásához meg kell oldani az  $(A - \lambda_1 \cdot E_3) \cdot x^T = \underline{0}^T$  HLER-t, melynek mátrixa

$$A - \lambda_1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A megoldások altere a  $\lambda_1 = 2$  sajátértékhez tartozó sajátaltér. Mivel a lépcsős alakból leolvasható, hogy  $x_2 = -x_3$ , és  $x_1, x_3$  szabad ismeretlenek, így:

$$U_{\lambda_1} = \{(x_1, -x_3, x_3) : x_1, x_3 \in \mathbb{R}\},$$

melynek egy bázisa az  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, -1, 1)$  vektorrendszer.

## Megjegyzés.

**VIGYÁZAT:**  $\underline{0} \in U_{\lambda_1}$ , de  $\underline{0}$  nem sajátvektor!!!

# A sajátvektor és a munkanélküliségi ráta egyensúlyi helyzete

## Példa.

(Példa az 1. előadásról.) Egy gazdaságban a munkanélküliek és a dolgozók közötti átmenetet a következő mátrix írja le (1 éves időtávon):

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

A mátrix alapján egy év alatt a dolgozók 80%-a dolgozó marad, 20%-a munkanélkülivé válik, a munkanélkülieknek pedig 60%-a talál munkát és 40%-a marad munkanélküli. Van-e olyan munkanélküliségi ráta, ami nem változik? Azaz találunk-e olyan  $v$  vektort, amelyre  $Av^T = v^T$ , ahol  $v$  első komponense a dolgozók szám, második komponense pedig a munkanélkülieké.

Tehát ha  $\lambda = 1$  sajátérték, akkor meg kell adnunk az  $U_\lambda$  sajátalteret.

# A sajátvektor és a munkanélküliségi ráta egyensúlyi helyzete

## Példa folyt.

Mivel  $|A - 1 \cdot E_2| = \begin{vmatrix} -0.2 & 0.6 \\ 0.2 & -0.6 \end{vmatrix} = 0$ , így  $\lambda = 1$  sajátérték.

$$A - 1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.6 \\ 0.2 & -0.6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A lépcsős alakból leolvasható, hogy  $x_1 = 3x_2$ , így:

$$U_\lambda = \{(3x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Tehát az egyensúlyi helyzet esetén a munkanélküliségi ráta:

$$\frac{x_2}{3x_2 + x_2} = \frac{1}{4} = 25\%.$$

# A sajátértékek kapcsolata a Leontief-modellel

## Tétel.

Legyen  $\mathcal{G}$  olyan gazdaság, melynek  $n$  ágazata van ( $n \in \mathbb{N}$ ), valamint legyen  $C \in (\mathbb{R}_0^+)^{n \times n}$  a ráfordítási mátrixa e gazdaságnak. Ekkor az  $x = Cx + d$  egyenletnek akkor és csak akkor van tetszőleges  $d \geq 0$  esetén  $x \geq 0$  megoldása, ha a következő ekvivalens feltételek valamelyike teljesül:

- $(E - C)^{-1}$  létezik, minden eleme nemnegatív, és  $C^m \rightarrow 0$ , ha  $m \rightarrow \infty$  (ez korábban szerepelt).
- $C$  minden sajátértékének abszolútértéke kisebb, mint 1.

Mivel a  $x = Cx + d$  egyenlet megoldhatóságából következik a gazdaság működőképessége, így a mátrix sajátértékei alapján is eldönthető a működőképesség.

A  $2 \times 2$ -es mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait szemléltetni a következő angol nyelvű videó. Ha egy adott  $2 \times 2$ -es mátrix oszlopvektorait a standard bázis képének tekintjük, és ennek mintájára a sík összes vektorát transzformáljuk, akkor a sajátértékek és sajátvektorok geometriai jelentést kapnak, ezt mutatja be a videó, amely az előadáson magyar nyelvű magyarázattal szerepel:

<https://youtu.be/PFDu9oVAE-g?t=80>

# Igaz vagy Hamis?

- Minden  $2 \times 2$ -es valós mátrixnak, van valós sajátértéke.

**Hamis**, például korábban láttuk, hogy az  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  mátrixnak nincs valós sajátértéke.