

TUDNIVALÓK

- A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésükre.
- A dolgozatírásnál számológép használható (csak olyan számológép, amelynek használata az érettségien is engedélyezett).
- Minden választ indokolni kell, a végeredmény pusztán közlése nem elegendő.

1. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ha létezik, számítsa ki az alábbi mátrixokat, ha valamelyik nem létezik, indokolja. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg. **Amikor mátrixokat szoroz, legalább két elem kiszámítását részletesen is írja le.**

(a) A^2 ;

(b) AB^T, A^TB ;

(c) $(A - A^T)B$.

(x pont)

MEGOLDÁS. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$;

(b) az AB^T szorzat nem definiált, $A^TB = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 1 \\ -8 & -8 & 0 \end{pmatrix}$;

(c) $(A - A^T)B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Feladat. Egy gazdaságban a munkanélküliek és a dolgozók közötti átmenetet az

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

mátrix írja le (1 éves időtávon). A mátrix oszlopai a jelenlegi dolgozóknak / munkanélkülieknek felelnek meg, a sorok pedig a változásnak. Tehát a fenti mátrix azt jelenti, hogy egy év alatt a dolgozók 80%-a dolgozó marad, 20%-a munkanélkülivé válik, a munkanélkülieknek pedig 60%-a talál munkát és 40%-a marad munkanélküli. Jelenleg 4 000 000 dolgozó és 1 000 000 munkanélküli van. Mekkora lesz a munkanélküliségi ráta 1 illetve 2 év múlva? Van-e egyensúlyi helyzete a munkanélküliségi rátának (vagyis olyan ráta, amely változatlan marad)?

(x pont)

MEGOLDÁS.

	1 év	2 év
Dolgozók száma:	3 800 000	3 760 000
Munkanélküliek száma:	1 200 000	1 240 000
Munkanélk. ráta:	24%	24.8%

Van egyensúlyi helyzete a munkanélküliségi rátának: 25%.

3. Feladat. Vezessük be a következő jelöléseket: $\mathbf{e}_{k,n} = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, ahol a k . komponensben található 1, továbbá $\mathbf{1}_n = (1 \dots 1)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Egy szállodalánc öt szállodája esetén vizsgálják a vendégéjszakák számát egy adott évben. Azt, hogy az egyes szállodákban az adott hónapban hány vendégéjszakát töltöttek, az $A = (\mathbf{a}_{i,j})_{5 \times 12}$ mátrix tartalmazza, azaz a mátrix $\mathbf{a}_{i,j}$ eleme azt mutatja meg, hogy az i -edik szállodában az év j -edik hónapjában mennyi volt a vendégéjszakák száma.

(a) Milyen jelentést tulajdoníthatunk az $\mathbf{1}_5^T \cdot A \cdot \mathbf{e}_{5,12}$ kifejezésnek.

(b) Írja le mátrixaritmetikai jelölésekkel, hogy a 4. szálloda esetén júliusban a szállodában eltöltött vendégéjszakák száma hány százaléka az egész évben a szállodában eltöltött vendégéjszakák számának.

(x pont)

MEGOLDÁS.

(a) Májusban az öt szállodában összesen a vendégéjszakák száma.

(b) $\frac{e_{4,5}^T \cdot A \cdot e_{7,12}}{e_{4,5}^T \cdot A \cdot I_{12}} \cdot 100$

4. Feladat. Határozza meg az alábbi determinánsok értékét. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix};$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$

(x pont)

MEGOLDÁS.

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -25$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -160.$

5. Feladat. Határozza meg az a valós paraméter értékét, ha tudja, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2a \\ 1 & a & 1 \\ 2a & 1 & a \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa 0. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg. (x pont)

MEGOLDÁS. Az a paraméter értéke 0 vagy $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

6. Feladat. Oldja meg a következő lineáris egyenletrendszert Gauss-elimináció vagy elemi bázistranszformáció alkalmazásával. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\begin{cases} 3x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ -5x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ -2x_1 & - & 6x_2 & + & 6x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \end{cases}.$$

(x pont)

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszer megoldható: két kötött és két szabad változó lesz. Egy lehetséges általános megoldás: $x_3 = 4x_1 - x_2$, $x_4 = 2 - 11x_1 + 6x_2$ ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$).

7. Feladat. Határozza meg az a és b valós paraméterek összes olyan értékét, amelyre a következő lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & 8x_2 & + & bx_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & a \end{cases}$$

(x pont)

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszernek pontosan akkor van egyetlen megoldása, ha $b \neq 57/5$ és $a = 2$.

8. Feladat. Az a valós paraméter függvényében határozza meg, hogy hány megoldása van a következő lineáris egyenletrendszernek. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\begin{cases} ax_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & a \\ x_1 & + & 2x_2 & + & ax_3 & = & 1 \end{cases}.$$

(A megoldásokat nem kell megadni, csak a számukat!)

(x pont)

MEGOLDÁS. Ha $a^2 - 5a \neq 0$, azaz $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$, akkor pontosan egy megoldás van.

Ha $a = 0$, végtelen sok megoldás van.

Ha $a = 5$, az egyenletrendszernek nincs megoldása.

9. Feladat. Számítsa ki a következő mátrix inverzét, ha létezik. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 9 & 16 & 1 \end{pmatrix}$$

(x pont)

MEGOLDÁS.

$$\begin{pmatrix} -197 & 77 & -16 \\ 110 & -43 & 9 \\ 13 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Feladat. Oldja meg az alábbi mátrixegyenletet. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

(x pont)

MEGOLDÁS. $X = \begin{pmatrix} -4 - 3x_{3,1} + 7x_{4,1} & 14 - 3x_{3,2} + 7x_{4,2} \\ 3 + 2x_{3,1} - 5x_{4,1} & -7 + 2x_{3,2} - 5x_{4,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \\ x_{4,1} & x_{4,2} \end{pmatrix}$, ahol $x_{3,1}, x_{4,1}, x_{3,2}, x_{4,2} \in \mathbb{R}$.

11. Feladat. Az $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}$ mátrix egy két ágazatra bontott gazdaság ráfordítási mátrixa. Döntse el, hogy működőképes-e a gazdaság, valamint állapítsa meg, hogy mekkora bruttó kibocsátás tartozik a $d = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektorral megadott nettó kibocsátáshoz. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

(x pont)

MEGOLDÁS. Mivel az A mátrix Leontief-inverze: $(E_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 10/3 & 5/3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$, ezért a gazdaság működőképes.

A d nettó kibocsátáshoz $x = (E_2 - A)^{-1} \cdot d = \begin{pmatrix} 25 \\ 45 \end{pmatrix}$ bruttó kibocsátás tartozik.

12. Feladat. Az $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}$ mátrix egy két ágazatra bontott gazdaság ráfordítási mátrixa. Vizsgálja meg, hogy a $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ árvektorral számolva mely ágazatok lesznek nyereségesek. Ha a gazdaság működőképes, de nem nyereséges mindkét ágazat, akkor adjon meg olyan árvektort, hogy mindkettő nyereséges legyen. Csak a végeredmény közlése nem elegendő, a számolás lépéseit is adja meg.

(x pont)

MEGOLDÁS. Mivel $v \cdot (E_2 - A) = (-0.6 \quad 0.6)$, ezért az első ágazat veszteséges, a második pedig nyereséges.

Legyen $v' = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$. Pontosán akkor nyereséges mindkét ágazat, ha $x > 0$ és $\frac{x}{2} < y < x$. Pl. a $v' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$ esetén mindkét ágazat nyereséges.