# 11. Előadás

$$2017x_1^2x_3x_4^4 + 4x_1x_2^3x_3x_4^4x_5 + 26x_1^5x_2^5x_4^5$$

**változók** / határozatlanok:

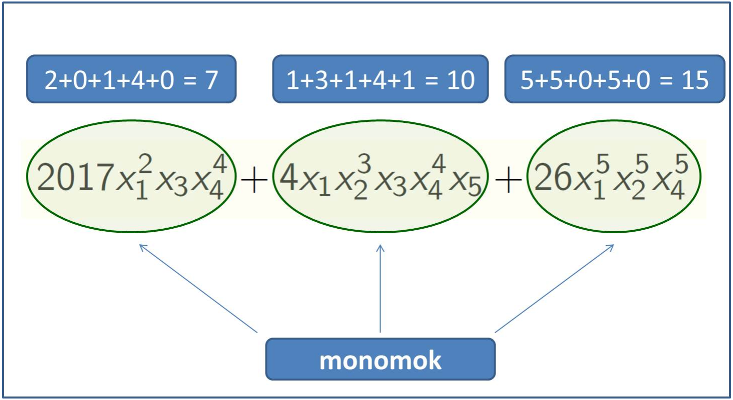
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$

$$2017x_1^2x_3x_4^4 + 4x_1x_2^3x_3x_4^4x_5 + 26x_1^5x_2^5x_4^5$$

$$2017x_1^2x_3x_4^4 + 4x_1x_2^3x_3x_4^4x_5 + 26x_1^5x_2^5x_4^5$$

$$2017x_1^2x_3x_4^4 + 4x_1x_2^3x_3x_4^4x_5 + 26x_1^5x_2^5x_4^5$$

**monomok**


2+0+1+4+0 = 7
1+3+1+4+1 = 10
5+5+0+5+0 = 15
$2017x_1^2x_3x_4^4 + 4x_1x_2^3x_3x_4^4x_5 + 26x_1^5x_2^5x_4^5$
monomok

A polinom foka: max(7,10,15) = 15.

$$2017x_1^2x_3x_4^4 + 4x_1x_2^3x_3x_4^4x_5 + 26x_1^5x_2^5x_4^5$$

**monomok**

Homogén másodfokú (3-határozatlanú) polinom

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 7x_1x_2 - 11x_1x_3 + 13x_2x_3$$

Homogén másodfokú (3-határozatlanú) polinom

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 7x_1x_2 - 11x_1x_3 + 13x_2x_3$$

Kvadratikus

**Definíció:** kvadratikus alakok.

A homogén másodfokú többváltozós polinomok által definiált polinomfüggvényeket **kvadratikus alakoknak** nevezzük.

**Példa.**

- Kvadratikus alakok:

$$\begin{aligned} x_1^2, &\quad q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ q(x_1) = x_1^2, \\ -x_1^2 - x_3^2, &\quad q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_3^2, \\ x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_3, &\quad q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_3, \\ x_1x_2 + x_2x_3, &\quad q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3. \end{aligned}$$

- Az alábbi polinomok nem definiálnak kvadratikus alakokat:
$x_1^3, \quad -x_1^2 - x_3, \quad x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2x_3 + 3x_1x_3.$

**Példa.**

Tekintsük az $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_3$ 3-változós homogén másodfokú polinomot. A hozzá tartozó kvadratikus alak:

$$q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \ q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_3.$$

Pl.: ha $v = (1, 2, 3)$, akkor $q(v) = 1^2 + 2^2 - 3 \cdot 1 \cdot 3 = -4.$

**Megjegyzés.**

A $q$ $n$-változós kvadratikus alak $\mathbb{R}^n$-beli vektorokhoz valós számokat rendel.

**Megjegyzés.**

Az $n$-változós homogén másodfokú polinomok általános alakja:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1}x_1^2 & + & 2a_{1,2}x_1x_2 & + & 2a_{1,3}x_1x_3 & + & \cdots & + & 2a_{1,n}x_1x_n \\
 & + & a_{2,2}x_2^2 & + & 2a_{2,3}x_2x_3 & + & \cdots & + & 2a_{2,n}x_2x_n \\
 & & & + & a_{3,3}x_3^2 & + & \cdots & + & 2a_{3,n}x_3x_n \\
 & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & + & a_{n,n}x_n^2
\end{array}$$

azaz

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j,j}x_j^2 + \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} 2a_{j,k}x_jx_k.$$

**Megjegyzés.**

Az $n$-változós homogén másodfokú polinomok általános alakja:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1}x_1^2 & + & 2a_{1,2}x_1x_2 & + & 2a_{1,3}x_1x_3 & + & \cdots & + & 2a_{1,n}x_1x_n \\
 & + & a_{2,2}x_2^2 & + & 2a_{2,3}x_2x_3 & + & \cdots & + & 2a_{2,n}x_2x_n \\
 & & & + & a_{3,3}x_3^2 & + & \cdots & + & 2a_{3,n}x_3x_n \\
 & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & + & a_{n,n}x_n^2
\end{array}$$

azaz

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j,j}x_j^2 + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} 2a_{j,k}x_jx_k.$$

**Definíció:** kvadratikus alak mátrixa.

A $\sum_{j=1}^{n} a_{j,j}x_j^2 + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} 2a_{j,k}x_jx_k$ polinomhoz tartozó

$$q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \ q(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,j}x_j^2 + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} 2a_{j,k}x_jx_k$$

kvadratikus alak **mátrixa** az $A_q = (a_{i,j})_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix, ahol $a_{k,j} = a_{j,k}$ $(1 \leqslant j < k \leqslant n)$.

**Példa.**

Legyen $q = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 3x_1x_2 + 5x_2x_3$. Ekkor $q$ mátrixa:

$$A_q = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 2 & 5/2 \\ 0 & 5/2 & -3 \end{pmatrix}.$$

**Megjegyzés.**

**Kvadratikus alak mátrixa mindig szimmetrikus mátrix.**

**Tétel.**

(a) Legyen $q \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n$-változós) kvadratikus alak, melynek mátrixa $A_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ekkor tetszőleges $v \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$q(v) = v \cdot A_q \cdot v^T$$

teljesül.

(b) Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrixra a $q_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \; v \mapsto v \cdot A \cdot v^T$ leképezés kvadratikus alak, melynek mátrixa $A$.

(c) Ha az $A$ és a $B$ $(n \times n)$-es szimmetrikus mátrixok különbözőek, akkor $q_A \neq q_B$.

**Példa.**

Legyen
$q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2^2 + 6x_2x_3 - 4x_3^2.$
Ekkor $q$ mátrixa

$$A_q = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

és

$$q(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \cdot A_q \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ha $v = (3, 1, 4)$, akkor

$$q(v) = \underbrace{(3, 1, 4) \cdot A_q}_{(21,4,-7)} \cdot (3, 1, 4)^T = (21, 4, -7) \cdot (3, 1, 4)^T = 39.$$

**Definíció:** majdnem kanonikus alak.

A $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,j} x_j^2 + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} 2a_{j,k}x_jx_k$ kvadratikus alak **majdnem kanonikus alakú**, ha $a_{j,k} = 0$ $(1 \leqslant j < k \leqslant n)$.

**Tétel.**

A $q$ kvadratikus alak pontosan akkor majdnem kanonikus alakú, ha mátrixa diagonális.

**Példa.**

A

$$-2x_1^2, \quad 2x_1^2 + 3x_2^2, \quad 3x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2, \quad x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

kvadratikus alakok majdnem kanonikus alakúak.

**Definíció:** szimmetrizált elemi átalakítások.

Az $A$ szimmetrikus mátrix **szimmetrizált elemi átalakításai** az alábbiak:

1. az $A$ mátrix $i$-edik és $j$-edik sorának cseréje, majd az $A$ mátrix $i$-edik és $j$-edik oszlopának cseréje,
2. az $A$ mátrix $i$-edik sorát szorozzuk egy $c \neq 0$ valós számmal, majd az $A$ mátrix $i$-edik oszlopának szorzása a $c$ számmal,
3. az $A$ mátrix $i$-edik sorának $c$-szeresét hozzáadjuk a $j$-edik sorához, majd az $A$ mátrix $i$-edik oszlopának $c$-szeresét hozzáadjuk a $j$-edik oszlopához ($c \in \mathbb{R}$).

**Tétel.**

Tetszőleges $A$ szimmetrikus mátrix szimmetrizált elemi átalakításokkal diagonális alakra hozható úgy, hogy a diagonális mátrix főátlójában $-1$-esek, 1-esek és 0-ák vannak.

**Példa.**

Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Ekkor

$$A \underset{[2]+(-2)\times[1]}{\overset{\text{sz.}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{[3]+(-3)\times[1]}{\overset{\text{sz.}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\underset{[3]+(-1)\times[2]}{\overset{\text{sz.}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \underset{1/\sqrt{6}\cdot[3]}{\overset{\text{sz.}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

azaz $A \overset{\text{sz.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**Tétel.**

Legyenek $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrixok. Ha $A \overset{\text{sz.}}{\sim} B$, akkor $q_A$ és $q_B$ értékkészlete megegyezik, valamint ugyanannyi helyen veszik fel értékül a 0-át.

### Megjegyzés.

Ha a $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix diagonális, $D = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$, ahol $a_1, \dots, a_n \in \{-1, 0, 1\}$, akkor a következő esetek lehetségesek:

(1) $a_1 = \dots = a_n = 1$, ekkor

$$q_D = x_1^2 + \dots + x_n^2,$$

$q(v) \geqslant 0$ és $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $v = \underline{0}$,

(2) $a_1 = \dots = a_n = -1$, ekkor

$$q_D = -x_1^2 - \dots - x_n^2,$$

$q(v) \leqslant 0$ és $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $v = 0$,

**Megjegyzés (folyt.).**

(3) $a_1 = \cdots = a_p = 1$ , $a_{p+1} = \cdots = a_n = 0$ $(0 \leqslant p < n)$, ekkor

$$q_D = x_1^2 + \cdots + x_p^2,$$

$q(v) \geqslant 0$ és $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $v = (0, \dots, 0, *, \dots, *)^T$, ahol az első $p$ komponens 0,

(4) $a_1 = \cdots = a_m = -1$, $a_{m+1} = \cdots = a_n = 0$ $(0 \leqslant m < n)$, ekkor

$$q_D = -x_1^2 - \cdots - x_m^2,$$

$q(v) \leqslant 0$ és $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $v = (0, \dots, 0, *, \dots, *)^T$, ahol az első $m$ komponens 0,

**Megjegyzés (folyt.).**

(5) $a_1 = \cdots = a_p = 1,\ a_{p+1} = \cdots = a_{p+m} = -1,\ a_{p+m+1} = \cdots = a_n = 0$ $(0 < p, m < n)$, ekkor

$$q_D = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+m}^2$$

és $q$ értékkészlete $\mathbb{R}$.

**Példa.**

A $q$ kvadratikus mátrixa legyen $A_q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. A korábbi számolás alapján $A_q \overset{\text{sz.}}{\sim} D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Az előző jelöléseket használva $p = 1$, $m = 2$, ezért $q_D$ értékkészlete $\mathbb{R}$, tehát $q_D$, és így $q$ is az (5) esethez tartozik.

**Definíció:** kvadratikus alakok osztályozása.

Legyen $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak. Ekkor

1. $q$ **pozitív definit**, ha $q(v) \geqslant 0$ $(v \in \mathbb{R}^n)$ és $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $v = \underline{0}$,
2. $q$ **negatív definit**, ha $q(v) \leqslant 0$ $(v \in \mathbb{R}^n)$ és $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $v = 0$,
3. $q$ **pozitív szemidefinit**, ha $q(v) \geqslant 0$ $(v \in \mathbb{R}^n)$, és van olyan $v \neq \underline{0}$, amelyre $q(v) = 0$
4. $q$ **negatív szemidefinit**, ha $q(v) \leqslant 0$ $(v \in \mathbb{R}^n)$, és van olyan $v \neq \underline{0}$, amelyre $q(v) = 0$,
5. $q$ **indefinit**, ha $q$ értékkészlete $\mathbb{R}$.

**Tétel** (Sylvester Tehetetlenségi Tétele I.).

Tetszőleges $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak esetén $q$ mátrixa szimmetrizált elemi átalakításokkal diagonális alakra hozható, sőt olyan $D \in \{-1, 0, 1\}^{n\times n}$ diagonális mátrix is van, amelyre $A_q \overset{\text{sz.}}{\sim} D$ teljesül.

**Tétel** (Sylvester Tehetetlenségi Tétele II.).

Legyen $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak. Ha $D_1, D_2 \in \{-1, 0, 1\}^{n\times n}$ olyan diagonális mátrixok, amelyekre $D_1 \overset{\text{sz.}}{\sim} A_q \overset{\text{sz.}}{\sim} D_2$ teljesül, akkor a $D_1$ és $D_2$ mátrixok főátlójában lévő $(-1)$-esek, 1-esek és 0-ák száma megegyezik.

**Definíció: kanonikus alak.**

Legyen $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak. Ekkor

$$A_q \overset{\text{sz.}}{\sim} D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & \mathbf{0} & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

A $q_D = y_1^2 + \ldots y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+m}^2$ kvadratikus alakot $q$ **kanonikus alakjának** nevezzük.

**Példa.**

Legyen

$$q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2, x_3)^T \mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3$$

kvadratikus alak. Ekkor $q$ mátrixa

$$A_q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{sz.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Így $q$ kanonikus alakja: $y_1^2 + y_2^2$, azaz $q$ pozitív szemidefinit.

**Tétel** (Osztályozás kanonikus alakban).

Legyen $q \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak, melynek kanonikus alakja:

$$y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+m}^2.$$

1. Ha $p = n$, akkor $q$ pozitív definit.
2. Ha $p < n$ és $m = 0$, akkor $q$ pozitív szemidefinit.
3. Ha $m = n$, akkor $q$ negatív definit.
4. Ha $m < n$ és $p = 0$, akkor $q$ negatív szemidefinit.
5. Ha $p, m > 0$, akkor $q$ indefinit.

**Tétel** (Kanonikus és majdnem kanonikus).

Legyen $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak, melynek majdnem kanonikus alakja:

$$a_1 y_1^2 + \cdots + a_n y_n^2.$$

Ekkor $q$ kanonikus alakja

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+m}^2,$$

ahol

$$p = |\{i : a_i > 0\}| \quad \text{és} \quad m = |\{i : a_i < 0\}|.$$

## Példa.

Legyen $q$ az a kvadratikus alak, amelynek mátrixa

$$A_q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3$ $(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R})$ és

$$A_q \underset{[1]+1\times[2]}{\overset{\text{sz.}}{\sim}} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{[2]+(-1/2)\times[1]}{\overset{\text{sz.}}{\sim}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5/2 \\ 1 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{[3]+(-1/4)\times[2]}{\overset{\text{sz.}}{\sim}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5/2 \\ 0 & -5/2 & -1/4 \end{pmatrix} \underset{[3]+(-5/2)\times[2]}{\overset{\text{sz.}}{\sim}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Így $q$ majdnem kanonikus alakja $4y_1^2 - y_2^2 + 6y_3^2$, aminek következtében $q$ kanonikus alakja $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, azaz $q$ indefinit.

**Példa.**

Legyen $q$ az a kvadratikus alak, amelynek mátrixa

$$A_q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$q(0,1,1) = (0,1,1) \cdot A_q \cdot (0,1,1)^T = (5,-2,-2) \cdot (0,1,1)^T = -4,$$
$$q(1,1,0) = (1,1,0) \cdot A_q \cdot (1,1,0)^T = (2,2,1) \cdot (1,1,0)^T = 4,$$

így $q$ indefinit.

**Definíció:** Főnemes, Főkonzul és Főminor.

Legyen $A = (a_{i,j})_{n\times n}$ négyzetes mátrix. Ekkor $A$ **főminorjainak** nevezzük az

$$|a_{1,1}|\,,\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix},\ldots,\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,k} \end{vmatrix},\ldots,\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

determinánsokat, azaz a mátrix „bal felső sarkában” elhelyezkedő aldeterminánsait.

**Példa.**

Az $A = (i \cdot j - |i - j|)_{4\times 4}$ mátrix főminorjai:

$$|1| = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 8, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 9 & 11 \\ 1 & 6 & 11 & 16 \end{vmatrix} = 20.$$

**Tétel** (Főminorok és PDKA-k).

A $q$ kvadratikus alak pontosan akkor pozitív definit, ha $A_q$ minden főminora pozitív.

**Tétel** (Főminorok és NDKA-k).

A $q$ kvadratikus alak pontosan akkor negatív definit, ha $A_q$ főminorjai váltakozó előjelűek és az első főminor negatív.

**Megjegyzés.**

Ha az $A$ mátrix $k$-adik főminora $d_k$, akkor a $-A$ mátrix $k$-adik főminora $(-1)^k d_k$. Ha a $q$ kvadratikus alak pozitív definit, akkor a $-q$ kvadratikus alak negatív definit, melynek mátrixa $-A$.

**Példa.**

A

$$q\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad (u,x,y,z) \mapsto$$
$$16u^2 + 2ux + 12uy + 22uz + x^2 + 2xy + 2xz + 4y^2 + 10yz + 9z^2$$

kvadratikus alak pozitív definit, mivel mátrixa $A_q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 9 & 11 \\ 1 & 6 & 11 & 16 \end{pmatrix}$,

melynek minden főminora pozitív. (Vö.:
$q = (x+y+z+u)^2 + 3(y + 8/6z + 5/3u)^2 + 8/3(z + 5/4u)^2 + 5/2u^2$.)

**Példa.**

A $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto -x^2 - 2xy - 2y^2 - 2xz - 4yz - 3z^2$ kvadratikus alak negatív definit, mivel mátrixa $A_q = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, melynek főminorai: $-1$, $1$ és $-1$. (Vö.: $q = -(x+y+z)^2 - (y+z)^2 - z^2$.)

# A főminorok kapcsolata a Leontief-modellel

**Tétel.**

Legyen $\mathcal{G}$ olyan gazdaság, melynek $n$ ágazata van ($n \in \mathbb{N}$), valamint legyen $C \in (\mathbb{R}_0^+)^{n \times n}$ a ráfordítási mátrixa e gazdaságnak. Ekkor az $\mathrm{x} = C\mathrm{x} + \mathrm{d}$ egyenletnek akkor és csak akkor van tetszőleges $\mathrm{d} \geqslant 0$ esetén $\mathrm{x} \geqslant 0$ megoldása, ha a következő ekvivalens feltételek valamelyike teljesül:

- $(E - C)^{-1}$ létezik, minden eleme nemnegatív, és $C^m \to 0$, ha $m \to \infty$ (ez korábban szerepelt).
- $C$ minden sajátértékének abszolútértéke kisebb, mint 1 (ez is szerepelt korábban).
- Az $E - C$ mátix $k$. főminorai mind pozitívak tetszőleges $k = 1, \ldots, n$ esetén.

Mivel a $\mathrm{x} = C\mathrm{x} + \mathrm{d}$ egyenlet megoldhatóságából következik a gazdaság működőképessége, így az $E - C$ mátrix főminorai alapján is meghatározható a működőképesség.