10. Előadás

Homogén lineáris egyenletrendszer (HLER)

Definíció: homogén lineáris egyenletrendszer (HLER).

Legyen $m, n \in \mathbb{N}$, $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ és $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Az $A\mathrm{x}^T = \mathrm{b}^T$ lineáris egyenletrendszer **homogén**, ha $\mathrm{b} = (0, \dots, 0)$. Azaz, ha lineáris egyenletrendszerünk

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1} \cdot x_1 & + & \dots & + & a_{1,n} \cdot x_n & = & 0 \\ & & & & & \vdots & \\ a_{m,1} \cdot x_1 & + & \dots & + & a_{m,n} \cdot x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

alakú.

Jelölés.

Az $A\mathrm{x}^T = \underline{0}^T$ HLER megoldásainak halmazát U_A-val jelöljük.

Megjegyzés.

Az $Ax^T = \underline{0}^T$ HLER megoldásainak U_A halmaza az alábbi tulajdonságokkal bír:

- $\underline{0} \in U_A$ ($\underline{0}$ a **triviális megoldása** a HLER-nek),
- ha $c_1, c_2 \in U_A$, akkor $Ac_1^T = \underline{0}^T$ és $Ac_2^T = \underline{0}^T$, aminek következtében $\underline{0}^T = \underline{0}^T + \underline{0}^T = Ac_1^T + Ac_2^T = A(c_1^T + c_2^T) = A(c_1 + c_2)^T$, így $c_1 + c_2 \in U_A$ (U_A zárt az összeadásra),
- ha $c \in U_A$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $Ac^T = \underline{0}^T$, aminek következtében $\underline{0}^T = \lambda \cdot \underline{0}^T = \lambda \cdot (Ac^T) = A(\lambda \cdot c)^T$, így $\lambda \cdot c \in U_A$ (U_A zárt a skalárokkal való szorzásra).

Tétel.

Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak.

Tétel.

Lineáris egyenletrendszer megoldásai pontosan akkor alkotnak alteret, ha a lineáris egyenletrendszer homogén.

Példa.

Tekintsük az

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

HLER-t. Határozzuk meg U_A-t, ahol A az egyenletrendszer mátrixa.

A HLER bővített mátrixának lépcsős alakja:

$$(A \mid \underline{0}) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Példa folyt.

- A bővített mátrix utolsó oszlopa az elemi átalakítások során nem változik, így akár el is hagyható.
- A lépcsős alakból MINDEN leolvasható: két kötött (x_1 és x_3) és két szabad (x_2 és x_4) változó van, továbbá

$$U_A = \{(-2x_2 - x_4, x_2, -x_4, x_4) : x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

- Az U_A altérben bázist kapunk, ha ügyesen választjuk meg a szabad változók értékét:
  - $x_2 = 1$, $x_4 = 0$: $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$,
  - $x_2 = 0$, $x_4 = 1$: $v_2 = (-1, 0, -1, 1)$.

  A v_1, v_2 vektorrendszer bázis az U_A altérben, így dimenziója 2.

Definíció: fundamentális megoldásrendszer.

HLER megoldásai alterének bázisát a HLER **fundamentális megoldásrendszerének** nevezzük.

Példa folyt.

A $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$, $v_2 = (-1, 0, -1, 1)$ vektorrendszer bázis a megoldások alterében, azaz fundamentális megoldásrendszere az

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

HLER-nek.

Tétel.

Legyen $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Az $Ax^T = \underline{0}^T$ homogén lineáris egyenletrendszernek $r = r(A)$ darab kötött és $n-r$ darab szabad változója van, ezért az U_A altér dimenziója $n-r$. Ha a szabad változók $x_{i_{r+1}}, \dots, x_{i_n}$, akkor az alábbi $(n-r)$-esekhez tartozó

$$\begin{array}{lllll}
x_{i_{r+1}} = 1 & x_{i_{r+2}} = 0 & \dots & x_{i_n} = 0 & v_1 = (\dots, 1, \dots, 0, \dots, 0, \dots) \\
x_{i_{r+1}} = 0 & x_{i_{r+2}} = 1 & \dots & x_{i_n} = 0 & v_2 = (\dots, 0, \dots, 1, \dots, 0, \dots) \\
 & & & & \vdots \\
x_{i_{r+1}} = 0 & x_{i_{r+2}} = 0 & \dots & x_{i_n} = 1 & v_{n-r} = (\dots, 0, \dots, 0, \dots, 1, \dots)
\end{array}$$

megoldások fundamentális megoldásrendszert alkotnak. Azaz, ha a szabad változók helyébe ezeket az értékeket helyettesítjük, és meghatározzuk a kötött változók értékét, akkor ezek a konkrét megoldás-vektorok az U_A megoldástér egy bázisát alkotják.

Példa.

Tekintsük az $Ax^T = \underline{0}^T$ HLER-t, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 7 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 9 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -11 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 14 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Négy kötött (x_1, x_3, x_4, x_5) és négy szabad ismeretlen van (x_2, x_6, x_7, x_8), az U_A altér dimenziója $n - r(A) = 8 - 4 = 4$. A HLER megoldásalterének bázisa:

$$\begin{aligned}
x_2 = 1, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 0 \quad &\rightsquigarrow \quad v_1 = (-1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0),\\
x_2 = 0, x_6 = 1, x_7 = 0, x_8 = 0 \quad &\rightsquigarrow \quad v_2 = (11, 0, 0, -2, -14, 1, 0, 0),\\
x_2 = 0, x_6 = 0, x_7 = 1, x_8 = 0 \quad &\rightsquigarrow \quad v_3 = (1, 0, 0, 0, -5, 0, 1, 0),\\
x_2 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 1 \quad &\rightsquigarrow \quad v_4 = (3, 0, -2, -1, -6, 0, 0, 1).
\end{aligned}$$

Példa.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$, és $Ax^T = \underline{0}^T$ homogén lineáris egyenletrendszer. Ekkor a következők teljesülnek:

- Az egyenletrendszer 4 egyenletből áll, és 5 ismeretlenes.
- Az egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak $\mathbb{R}^5$-ben, tehát a megoldásaltér (U_A) legfeljebb 5 dimenziós.
- A megoldásaltér bázisa legfeljebb 5 elemű.
- Mivel a HLER kevesebb egyenletet tartalmaz, mint ismeretlent, mindig lesz szabad ismeretlen.
- Ha $r(A) = 3$, akkor 3 kötött ismeretlen van.
- Ha $r(A) = 3$, akkor 2 szabad ismeretlen van, így a megoldásaltér bázisa 2 elemű, azaz U_A 2 dimenziós.

Megjegyzés

Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $|A| \neq 0$, akkor $r(A) = n$. Ebben az esetben az $Ax^T = \underline{0}^T$ HLER esetén minden ismeretlen kötött, tehát egyetlen megoldása a $\underline{0}$ vektor.

Példa.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, és $Ax^T = \underline{0}^T$ homogén lineáris egyenletrendszer. Ekkor a következők teljesülnek:

- Ha $|A| \neq 0$, akkor csak triviális megoldása van az egyenletrendszernek.
- Ha $|A| \neq 0$, akkor nincs szabad ismeretlen.
- Ha $|A| \neq 0$, akkor a megoldásaltér 0 dimenziós.
- Ha $|A| \neq 0$, akkor a megoldásaltér 1 elemű.
- Ha $|A| = 0$, akkor van szabad ismeretlen.
- Ha $|A| = 0$, akkor a megoldásaltér legalább 1 dimenziós.
- Ha $|A| = 0$, akkor a megoldásaltér bázisa legalább 1 elemű.

Tétel.

Legyen U altér a $V = \mathbb{R}^n$ vektortérben. Ekkor van olyan $v_1, \dots, v_k \in V$ vektorok, amelyekre $U = [v_1, \dots, v_k]$ teljesül.

Példa.

Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ekkor U_A altér az $\mathbb{R}^4$ vektortérben,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ahogy korábbi példában már láttuk, ekkor U_A bázisa a

$$v_1 = (-2, 1, 0, 0), v_2 = (-1, 0, -1, 1)$$

vektorrendszer, ezért

$$U_A = [v_1, v_2].$$

Tétel.

Legyen U altér a $V = \mathbb{R}^n$ vektortérben. Ekkor vannak olyan m természetes szám és $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, hogy $U = U_A$.

Példa.

Legyen $U = \{(a, b, c, d) : a = b - 2c \text{ és } c = d - a + b\}$. Ekkor U altér az $\mathbb{R}^4$ vektortérben és

$$\begin{aligned} U &= \{(a, b, c, d) : a = b - 2c \text{ és } c = d - a + b\} \\ &= \{(a, b, c, d) : a - b + 2c = 0 \text{ és } a - b + c - d = 0\} = U_A, \end{aligned}$$

ahol $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sajátérték, sajátvektor

Definíció: mátrix sajátértéke.

Legyen $n \in \mathbb{N}$. Az A $(n \times n)$-es valós mátrixnak **sajátértéke** a λ valós szám, ha van olyan $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \underline{0}$ vektor, melyre $A \cdot v^T = \lambda \cdot v^T$ teljesül ($\rightsquigarrow$ v a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor).

Definíció: mátrix sajátvektora.

Legyen $n \in \mathbb{N}$. Az A $(n \times n)$-es valós mátrixnak **sajátvektora** a $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vektor, ha van olyan λ valós szám, melyre $A \cdot v^T = \lambda \cdot v^T$ teljesül ($\rightsquigarrow$ v a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor).

Példa.

Legyen $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, ekkor

- a $\lambda = 3$ valós szám sajátértéke A-nak, mivel a $v = (0, -1, 1)$ vektorra

  $$A \cdot v^T = A \cdot (0, -1, 1)^T = (0, -3, 3)^T = 3 \cdot (0, -1, 1)^T = 3 \cdot v^T$$

  teljesül.
- a $v = (2, -3, 2)$ vektor sajátvektora A-nak, mivel

  $$A \cdot v^T = A \cdot (2, -3, 2)^T = (2, -3, 2)^T = 1 \cdot (2, -3, 2)^T = 1 \cdot v^T.$$

  A v vektor a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozik.

Megjegyzés (A sajátértékek meghatározása).

Tegyük fel, hogy a $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vektor sajátvektora az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak, mégpedig a $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértékhez tartozó sajátvektora. Ekkor

$$\begin{aligned} A \cdot v^T = \lambda \cdot v^T &\iff A \cdot v^T = \lambda \cdot E_n \cdot v^T \\ &\iff (A - \lambda \cdot E_n) \cdot v^T = \underline{0}^T. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy v **nemtriviális** megoldása az $(A - \lambda \cdot E_n) \cdot \mathrm{x}^T = \underline{0}^T$ HLER-nek. Ha $|A - \lambda \cdot E_n| \neq 0$ teljesülne, akkor (a Cramer-szabály következtében) a HLER-nek pontosan egy megoldása lenne, a triviális ($\mathrm{x} = \underline{0}$). Így az $A - \lambda \cdot E_n$ mátrix determinánsa 0.

Tétel.

Az A mátrixnak a λ valós szám pontosan akkor sajátértéke, ha $|A - \lambda \cdot E_n| = 0$.

Definíció: karakterisztikus polinom.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A $p_A = |A - \lambda \cdot E_n|$ polinomot az A mátrix **karakterisztikus polinomjának** nevezzük.

Tétel (A sajátértékek és a karakterisztikus polinom).

A λ valós szám pontosan akkor sajátértéke az A valós négyzetes mátrixnak, ha λ gyöke A karakterisztikus polinomjának.

Példa.

Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 35 & 45 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit.

Az A mátrix karakterisztikus polinomja:

$$
\begin{aligned}
p_A = |A - \lambda \cdot E_2| &= \left| \begin{pmatrix} 35 & 45 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} 35 & 45 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 35-\lambda & 45 \\ -6 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2 - 37\lambda + 340.
\end{aligned}
$$

Az $\lambda^2 - 37\lambda + 340 = 0$ egyenlet megoldásai: 20 és 17. Így A sajátértékei: $\lambda_1 = 20$ és $\lambda_2 = 17$.

Példa.

Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit.

Az A mátrix karakterisztikus polinomja:

$$p_A = |A - \lambda \cdot E_2| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Az $\lambda^2 + 1 = 0$ egyenletnek nincs valós megoldása, ezért az A mátrixnak nincsenek valós sajátértékei.

Megjegyzés

Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix karakterisztikus polinomja n-ed fokú polinom, így legfeljebb n valós sajátértéke van A-nak.

Definíció: sajátaltér.

Valós mátrix adott sajátértékhez tartozó sajátvektorai a zérusvektorral együtt alteret alkotnak. Ezen altér az adott sajátértékhez tartozó **sajátaltér**. A λ sajátértékhez tartozó sajátalteret U_λ jelöli.

Tétel (Sajátaltér bázisa).

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterének egy bázisa éppen az $(A - \lambda \cdot E)\mathrm{x}^T = \underline{0}^T$ HLER megoldásterének egy bázisa (azaz egy fundamentális rendszere).

Példa.

Adjuk meg az $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit, és az egyik sajátértékéhez tartozó sajátalterét.

- Az A mátrix karakterisztikus polinomja:
  $$p_A = |A - \lambda \cdot E_3| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & 5 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix}$$
  $$= (2-\lambda)[(3-\lambda)(-\lambda) - (-2)] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) =$$
  $$= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1) = -(\lambda-2)^2(\lambda-1).$$
- Az A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 1$.
- Meghatározzuk U_{λ_1}-et, azaz a $\lambda_1 = 2$-höz tartozó sajátalteret.

Példa folyt.

Az U_{λ_1} sajátaltér meghatározásához meg kell oldani az $(A - \lambda_1 \cdot E_3) \cdot \mathrm{x}^T = \underline{0}^T$ HLER-t, melynek mátrixa

$$A - \lambda_1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A megoldások altere a $\lambda_1 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátaltér. Mivel a lépcsős alakból leolvasható, hogy $x_2 = -x_3$, és x_1, x_3 szabad ismeretlenek, így:

$$U_{\lambda_1} = \{(x_1, -x_3, x_3) : x_1, x_3 \in \mathbb{R}\},$$

melynek egy bázisa az $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 1)$ vektorrendszer.

Megjegyzés.

VIGYÁZAT: $\underline{0} \in U_{\lambda_1}$, de $\underline{0}$ nem sajátvektor!!!

A sajátvektor és a munkanélküliségi ráta egyensúlyi helyzete

Példa.

(Példa az 1. előadásról.) Egy gazdaságban a munkanélküliek és a dolgozók közötti átmenetet a következő mátrix írja le (1 éves időtávon):

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

A mátrix alapján egy év alatt a dolgozók 80%-a dolgozó marad, 20%-a munkanélkülivé válik, a munkanélkülieknek pedig 60%-a talál munkát és 40%-a marad munkanélküli. Van-e olyan munkanélküliségi ráta, ami nem változik? Azaz találunk-e olyan v vektort, amelyre $Av^T = v^T$, ahol v első komponense a dolgozók szám, második komponense pedig a munkanélkülieké.

Tehát ha $\lambda = 1$ sajátérték, akkor meg kell adnunk az U_λ sajátalteret.

A sajátvektor és a munkanélküliségi ráta egyensúlyi helyzete

Példa folyt.

Mivel $|A - 1 \cdot E_2| = \begin{vmatrix} -0.2 & 0.6 \\ 0.2 & -0.6 \end{vmatrix} = 0$, így $\lambda = 1$ sajátérték.

$$A - 1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.6 \\ 0.2 & -0.6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A lépcsős alakból leolvasható, hogy $x_1 = 3x_2$, így:

$$U_\lambda = \{(3x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Tehát az egyensúlyi helyzet esetén a munkanélküliségi ráta: $\frac{x_2}{3x_2+x_2} = \frac{1}{4} = 25\%$.

A sajátértékek kapcsolata a Leontief-modellel

Tétel.

Legyen $\mathcal{G}$ olyan gazdaság, melynek n ágazata van ($n \in \mathbb{N}$), valamint legyen $C \in (\mathbb{R}_0^+)^{n \times n}$ a ráfordítási mátrixa e gazdaságnak. Ekkor az $\mathrm{x} = C\mathrm{x} + \mathrm{d}$ egyenletnek akkor és csak akkor van tetszőleges $\mathrm{d} \geqslant 0$ esetén $\mathrm{x} \geqslant 0$ megoldása, ha a következő ekvivalens feltételek valamelyike teljesül:

- $(E - C)^{-1}$ létezik, minden eleme nemnegatív, és $C^m \to 0$, ha $m \to \infty$ (ez korábban szerepelt).
- C minden sajátértékének abszolútértéke kisebb, mint 1.

Mivel a $\mathrm{x} = C\mathrm{x} + \mathrm{d}$ egyenlet megoldhatóságából következik a gazdaság működőképessége, így a mátrix sajátértékei alapján is eldönthető a működőképesség.

A 2x2-es mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait szemléltetni a következő angol nyelvű videó. Ha egy adott 2x2-es mátrix oszlopvektorait a standard bázis képének tekintjük, és ennek mintájára a sík összes vektorát transzformáljuk, akkor a sajátértékek és sajátvektorok geometriai jelentést kapnak, ezt mutatja be a videó, amely az előadáson magyar nyelvű magyarázattal szerepel:

https://youtu.be/PFDu9oVAE-g?t=80

Igaz vagy Hamis?

- Legyen $A \in \mathbb{R}^{5\times 6}$, és $Ax^T = 0^T$ homogén lineáris egyenletrendszer. Ekkor az egyenletrendszer 5 egyenletből áll.

Igaz, mivel $A \in \mathbb{R}^{5\times 6}$, így 5 egyenletet és 6 ismeretlent tartalmaz az $Ax^T = 0^T$ HLER.

- Van olyan 2×2-es valós mátrix, amelynek nincs valós sajátértéke.

Igaz, például korábban láttuk, hogy az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixnak nincs valós sajátértéke.