9. Előadás

Koordinátasor

Tétel.

Legyen $\mathcal{B}: v_1, \ldots, v_n$ bázisa a V valós vektortérnek. Ekkor tetszőleges $v \in V$ vektorhoz pontosan egy olyan $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T$ valós szám-n-es létezik, amelyre

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n$$

teljesül.

Definíció: Koordinátasor.

A $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T$ valós szám-n-est a v vektor $\mathcal{B}: v_1, \ldots, v_n$ bázisra vonatkozó **koordinátasorának** nevezzük és $[v]_{\mathcal{B}}$-vel jelöljük.

Példa.

A $V = \mathbb{R}^n$ valós vektortérben a $v = (a_1, \ldots, a_n)^T$ vektor koordinátasora a standard bázisra vonatkozóan $(a_1, \ldots, a_n)^T$, mivel

$$v = \underbrace{a_1 \cdot e_1}_{(a_1,0,\ldots,0)^T} + \cdots + \underbrace{a_n \cdot e_n}_{(0,\ldots,0,a_n)^T},$$

azaz $[v]_{\text{st.}} = (a_1, \ldots, a_n)^T$.

Példa.

Határozzuk meg az $v = (1, 1, 1)^T$ vektor koordinátasorát a

$$\begin{aligned} \mathcal{B}: \;\; & e_1 = (1,0,0)^T, && e_2 = (0,1,0)^T, && e_3 = (0,0,1)^T, \\ \mathcal{B}': \;\; & v_1 = (1,-1,2)^T, && v_2 = (2,-1,7)^T, && v_3 = (1,-2,0)^T \end{aligned}$$

bázisokban.
(Koordinátasor a $\mathcal{B}$ bázisban) Olyan α, β, γ valós számokat keresünk, amelyekre

$$(1,1,1)^T = \alpha \cdot (1,0,0)^T + \beta \cdot (0,1,0)^T + \gamma \cdot (0,0,1)^T = (\alpha, \beta, \gamma)^T$$

teljesül. Ekkor $\alpha = \beta = \gamma = 1$, a v vektor koordináta sora a $\mathcal{B}$ bázisban $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Példa (folyt.).

(Koordinátasor a $\mathcal{B}'$ bázisban) Olyan α, β, γ valós számokat keresünk, melyekre

$$(1,1,1)^T = \alpha \cdot (1,-1,2)^T + \beta \cdot (2,-1,7)^T + \gamma \cdot (1,-2,0)^T.$$

Ez az egyenlőség a következő LER-re vezet:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & 1, \\ -\alpha & - & \beta & - & 2\gamma & = & 1, \\ 2\alpha & + & 7\beta & & & = & 1. \end{array} \right.$$

Példa (folyt.).

(Koordinátasor a $\mathcal{B}'$ bázisban) Olyan α, β, γ valós számokat keresünk, melyekre

$$(1,1,1)^T = \alpha \cdot (1,-1,2)^T + \beta \cdot (2,-1,7)^T + \gamma \cdot (1,-2,0)^T$$

teljesül. Ez az egyenlőség a következő LER-re vezet:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 1 \cdot \alpha & + & 2 \cdot \beta & + & 1 \cdot \gamma & = & 1, \\ (-1) \cdot \alpha & + & (-1) \cdot \beta & + & (-2) \cdot \gamma & = & 1, \\ 2 \cdot \alpha & + & 7 \cdot \beta & + & 0 \cdot \gamma & = & 1. \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right)$$

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása: $\alpha = 18$, $\beta = -5$, $\gamma = -7$.

Példa (folyt.).

... Az egyenletrendszer egyetlen megoldása: $\alpha = 18$, $\beta = -5$, $\gamma = -7$.
Ezért a v vektor koordinátasora a $\mathcal{B}'$ bázisban:

$$[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 18 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Miért EBT az EBT?

Tétel (EBT).

Legyen $v_1, \dots, v_n$ bázis a V vektortérben, valamint legyen $u \in V$, amelynek koordinátasora ebben a bázisban $(a_1, \dots, a_n)^T$, azaz $u = a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n$. Ekkor a

$$v_1, \dots, v_{\ell-1}, u, v_{\ell+1}, \dots, v_n$$

vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha $a_\ell \neq 0$.

Ha a $v \in V$ vektor koordinátasora a $v_1, \dots, v_n$ bázisban $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$, akkor a $v_1, \dots, v_{\ell-1}, u, v_{\ell+1}, \dots, v_n$ bázisban v koordinátasora:

$$\left(\frac{\alpha_1 a_\ell - \alpha_\ell a_1}{a_\ell}, \dots, \frac{\alpha_{\ell-1} a_\ell - \alpha_\ell a_{\ell-1}}{a_\ell}, \frac{\alpha_\ell}{a_\ell}, \frac{\alpha_{\ell+1} a_\ell - \alpha_\ell a_{\ell+1}}{a_\ell}, \dots, \frac{\alpha_n a_\ell - \alpha_\ell a_n}{a_\ell}\right).$$

„Koordináták a régi bázisban”

		u		v	
v_1	$\dots$	a_1	$\dots$	α_1	$\dots$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
$v_{\ell-1}$	$\dots$	$a_{\ell-1}$	$\dots$	$\alpha_{\ell-1}$	$\dots$
v_ℓ	$\dots$	a_ℓ	$\dots$	α_ℓ	$\dots$
$v_{\ell+1}$	$\dots$	$a_{\ell+1}$	$\dots$	$\alpha_{\ell+1}$	$\dots$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
v_n	$\dots$	a_n	$\dots$	α_n	$\dots$

„Koordináták az új bázisban”

		v_ℓ		v	
v_1	$\dots$	$-a_1/a_\ell$	$\dots$	$(\alpha_1 a_\ell - \alpha_\ell a_1)/a_\ell$	$\dots$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
$v_{\ell-1}$	$\dots$	$-a_{\ell-1}/a_\ell$	$\dots$	$(\alpha_{\ell-1} a_\ell - \alpha_\ell a_{\ell-1})/a_\ell$	$\dots$
u	$\dots$	$1/a_\ell$	$\dots$	α_ℓ/a_ℓ	$\dots$
$v_{\ell+1}$	$\dots$	$-a_{\ell+1}/a_\ell$	$\dots$	$(\alpha_{\ell+1} a_\ell - \alpha_\ell a_{\ell+1})/a_\ell$	$\dots$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
v_n	$\dots$	$-a_n/a_\ell$	$\dots$	$(\alpha_n a_\ell - \alpha_\ell a_n)/a_\ell$	$\dots$

Megjegyzés.

Az induló bázisunk —ált.— az $e_1, \dots, e_n$ standard bázis, mert abban egyszerű leolvasni a koordinátákat.

Mátrix rangja

Definíció: Mátrix rangjai: sor- és oszloprang.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, azaz legyen A valós mátrix, melynek m sora és n oszlopa van.

- Az A mátrix **sorrangja** a mátrix sorai, mint $\mathbb{R}^n$-beli vektorok, által alkotott vektorrendszer rangja (jel.: $r_s(A)$).
- Az A mátrix **oszloprangja** a mátrix oszlopai, mint $\mathbb{R}^m$-beli vektorok, által alkotott vektorrendszer rangja (jel.: $r_o(A)$).

Definíció: Mátrix rangai: determinánsrang.

Az A mátrix **determinánsrangja** a mátrixból kiválaszható legnagyobb méretű nemeltűnő (nem 0) aldetermináns rendje (jel.: $r_d(A)$). Az A mátrix determinánsrangja r, ha A-nak **van olyan** r-rendű aldeterminánsa, amelynek értéke nem 0, és minden r-nél nagyobb rendű aldeterminánsa már 0.

Példa.

Legyen $A = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 4 & 14 & 10 & 15 \\ 5 & -3 & 2 & 8 & 10 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 6 & 10 & 5 \\ 1 & 7 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -12 & 3 & -4 & 5 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{7\times 6}$.

Példa (folyt.).

$$\begin{pmatrix}
5 & 11 & 4 & 14 & 10 & 15 \\
5 & \boxed{-3} & 2 & \boxed{8} & \boxed{10} & 3 \\
3 & \boxed{2} & 1 & \boxed{6} & \boxed{5} & 4 \\
3 & -3 & 4 & 6 & 10 & 5 \\
1 & 7 & 0 & 4 & 0 & 5 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
-1 & \boxed{-12} & 3 & \boxed{-4} & \boxed{5} & -4
\end{pmatrix}$$

A sorok és oszlopok „metszetében” álló elemekből alkotott 3-rendű aldetermináns értéke -70.

Példa (folyt.).

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \frac{41}{26} & \frac{35}{26} & \frac{11}{26} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \frac{9}{26} & -\frac{5}{26} & \frac{17}{26} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \frac{15}{26} & \frac{35}{26} & \frac{37}{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A k-rendű aldeterminánsok száma $(k = 3, 4, 5, 6)$ rendre: 700, 525, 126, 7.

Tétel (Rangszámtétel).

Tetszőleges A valós mátrixra

$$r_s(A) = r_o(A) = r_d(A)$$

teljesül.

Definíció: mátrix rangja.

Az $r_s(A)$, $r_o(A)$ és $r_d(A)$ rangok közös értékét az A mátrix **rangjának** nevezzük (jel.: $r(A)$).

Tétel.
Mátrix rangjának kiszámítása Gauss-eliminációval

- Gauss-eliminációt hajtunk végre a mátrixon.
- A lépcsős alakban szereplő nem-0 sorok száma adja meg a mátrix rangját.

Tétel (Mátrix rangjának kiszámítása EBT-vel)**.**

- A mátrixon EBT-t hajtunk végre. A generáló elem oszlopát el lehet hagyni, sőt akár a sorokat is!
- A bázisba bevitt oszlopvektorok száma adja a rangot.

Megjegyzés.

- Mátrixok rangját ugyanúgy számoljuk, mint a vektorrendszerek rangját.
- Ha Gauss-eliminációval számoljuk a mátrix rangját, akkor a mátrix sorrangját határozzuk meg.
- Ha EBT-vel számoljuk a mátrix rangját, akkor a mátrix oszloprangját határozzuk meg.

Példa.

Határozzuk meg az A mátrix rangját, és adjunk meg maximális méretű nem nulla aldeterminánst a mátrixban, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 9 & -11 \end{pmatrix}.$$

Először Gauss-eliminációval számolunk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 9 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

A könnyebb számolás érdekében a 2. sort cseréljük fel a 3. sorral, majd a 4.-kel is. Ekkor a következő mátrixot kapjuk: ...

Példa (folyt.).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & -3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mivel a lépcsős alakban 3 nem nulla sor szerepel, így a (sor)rang 3. Egy maximális méretű nem nulla aldeterminánst pedig úgy kaphatunk, ha a lépcsős alaknak megfelelő eredeti sorokat és oszlopokat megkeressük. Ebben az esetben az 1., 3., 4., sorok (a sorcserék miatt), és az 1., 2., 3. oszlopok által meghatározott determináns lesz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 9 & -11 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Példa (folyt.).

Meghatározzuk EBT-vel a mátrix rangját, és megadunk egy maximális méretű nemeltűnő determinánst a mátrixban. A számolás során a generáló elem sora és oszlopa is elhagyható.

0.	a_1	a_2	a_3	a_4
e_1	1^*	1	3	-2
e_2	0	-3	-1	7
e_3	1	2	4	-5
e_4	2	4	9	-11

1.	a_2	a_3	a_4
e_2	-3	-1^*	7
e_3	1	1	-3
e_4	2	3	-7

2.	a_2	a_4
e_3	-2^*	4
e_4	-7	14

3.	a_4
e_4	0

A mátrix (oszlop)rangját a bázisba bekerült oszlopvektorok száma adja, ami 3.

Példa (folyt.).

Mivel $r(A) = r_d(A) = 3$, így 3-rendű a legnagyobb méretű nem nulla aldetermináns, ami kiválasztható a mátrixból. Az EBT-táblázat azt is megmutatja, hogy mely sorokat és oszlopokat lehet választanunk:

3.	a_4
e_4	0

Mivel az a_1, a_2, a_3 került be a bázisba, ezért az 1., 2., 3. oszlopokat választhatjuk. Továbbá az e_1, e_2, e_3 bázisvektorok helyére vittük be ezeket a vektorokat, így az 1., 2., 3. sorokat tekinthetjük. A kiválasztott sorok és oszlopok által meghatározott aldetermináns maximális méretű nem nulla aldetermináns lesz.

Példa (folyt.).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 9 & -11 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Megfigyelhetjük, hogy nem ugyanazt a maximális méretű aldeterminánst kaptuk, mint a Gauss-elimináció során, de a mérete, ami a determináns rangot adja, most is 3.

Sorok vagy oszlopok

Mivel a mátrix rangjánál láttuk, hogy a sor- és az oszloprang megegyezik, így ha **csak a vektorrendszer rangját** szeretnénk kiszámítani, akkor **mindegy**, hogy sorokba vagy oszlopokba írjuk a vektorokat, akár Gauss-eliminációval, akár EBT-vel számolunk. Vannak azonban olyan esetek, amikor számít, hogy sorokba vagy oszlopokba írjuk a vektorokat.

Oszlopokba kell írni a vektorokat, ha ...

- azt vizsgáljuk eleme-e a v vektor egy generált altérnek, és meg kell adnunk a v-t a generátorrendszer lineáris kombinációjaként is (ha lehet).
- a v vektor koordinátasorát határozzuk meg egy adott bázisban.
- EBT-vel határozzuk meg egy generált altér bázisát.

Sorokba kell írni a vektorokat, ha ...

- Gauss-eliminációval határozzuk meg egy generált altér bázisát.

Portfólió-analízis

Példa.

Tegyük fel, hogy egy bank 4 különböző eszközbe fektet be (réz, búza, arany és kakaó). Az ügyfeleinek ezen befektetésekből 3 különböző befektetési jegyet kínál, melyekben a fenti eszközök más-más súllyal szerepelnek. Az alábbi mátrix mutatja a három különböző befektetési jegy összetételét —az összes befektetett pénz arányában:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \text{Réz} & \text{Búza} & \text{Arany} & \text{Kakaó} \end{array} \\ \begin{array}{c} BJ_1 \\ BJ_2 \\ BJ_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 & -0.2 & 0.1 \\ -0.4 & 0.8 & 0.3 & 0.3 \\ 0.04 & 0.63 & 0.12 & 0.21 \end{pmatrix} \end{array}$$

Lehetséges-e a fenti befektetési jegyekből olyan portfóliót összeállítani, ami egyenértékű azzal, mintha minden pénzünket rézbe fektettük volna?

Példa (folyt.).

A matematikai modell:

A befektetési jegyeknek vektorok feleltethetők meg az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned}
\mathrm{BJ}_1 &\quad\leftrightsquigarrow\quad v_1 = (0.6, 0.5, -0.2, 0.1)^T, \\
\mathrm{BJ}_2 &\quad\leftrightsquigarrow\quad v_2 = (-0.4, 0.8, 0.3, 0.3)^T, \\
\mathrm{BJ}_3 &\quad\leftrightsquigarrow\quad v_3 = (0.04, 0.63, 0.12, 0.21)^T,
\end{aligned}$$

$$\mathrm{BJ}_4 \quad\leftrightsquigarrow\quad v_4 = (1, 0, 0, 0)^T.$$

A matematikai probléma: $v_4 \overset{?}{\in} [v_1, v_2, v_3]$.

Példa (folyt.).

Megoldás:

0.	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	0.6	−0.4	0.04	1
e_2	0.5	0.8	0.63	0
e_3	−0.2	0.3	0.12	0
e_4	0.1	0.3	0.21	0

1.	v_2	v_3	v_4
e_1	−2.2	−1.22	1
e_2	−0.7	−0.42	0
e_3	0.9	0.54	0
v_1	3	2.1	0

2.	v_3	v_4
e_1	0.1	1
v_2	0.6	0
e_3	0	0
v_1	0.3	0

3.	v_4
v_3	10
v_2	−6
e_3	0
v_1	−3

$$v_4 = (-3) \cdot v_1 + (-6) \cdot v_2 + 10 \cdot v_3$$

Példa (folyt.).

Válasz: Lehetséges a fenti befektetési jegyekből olyan portfóliót összeállítani, ami egyenértékű azzal, mintha minden pénzünket rézbe fektettük volna.

Mi a válasz akkor, ha a bank nem enged negatív pozíciókat felvenni a befektetési jegyekből?

Válasz: Ebben az esetben nem lehetséges a fenti befektetési jegyekből olyan portfóliót összeállítani, ami egyenértékű azzal, mintha minden pénzünket rézbe fektettük volna. A v_4 egyértelműen állítható elő a v_1, v_2 és v_3 vektorok lineáris kombinációjaként.

Példa.

Egy másik bank 6 féle eszközbe fektet, és a következő 3 féle befektetési jegyet értékesíti:

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 & -0.3 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & -0.7 & 0.1 & 1.1 & 0.2 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Az ügyféligények felmérése után a bank megbízza egy munkatársát, hogy alakítson ki egy új befektetési jegyet. A munkatárs a következő befektetési arányokat javasolja az új befektetési jegyhez:

$$(0.4, -0.6, 0.5, 0.6, -0.1, 0.2)^T.$$

Ha engednek negatív pozíciókat is felvenni a befektetési jegyekből, megérdemli-e a munkatárs a fizetését?

Példa.

A matematikai modell: A befektetési jegyeknek ismét vektorokat feleltetünk meg az alábbiak szerint:

$$\mathrm{BJ}_1 \quad \leftrightsquigarrow \quad v_1 = (0.1, 0.2, 0.2, -0.3, 0.2, 0.6)^T,$$

$$\mathrm{BJ}_2 \quad \leftrightsquigarrow \quad v_2 = (0.2, -0.7, 0.1, 1.1, 0.2, 0.1)^T,$$

$$\mathrm{BJ}_3 \quad \leftrightsquigarrow \quad v_3 = (-0.1, 0.1, -0.2, 0.2, 0.5, 0.5)^T,$$

$$\mathrm{BJ}_4 \quad \leftrightsquigarrow \quad v_4 = (0.4, -0.6, 0.5, 0.6, -0.1, 0.2)^T.$$

A matematikai probléma: $v_4 \overset{?}{\in} [v_1, v_2, v_3]$.

Példa (folyt.).

Megoldás:

0.	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	0.1	0.2	−0.1	0.4
e_2	0.2	−0.7	0.1	−0.6
e_3	0.2	0.1	−0.2	0.5
e_4	−0.3	1.1	0.2	0.6
e_5	0.2	0.2	0.5	−0.1
e_6	0.6	0.1	0.5	0.2

$\dots$

3.	v_4
v_1	1
v_2	1
e_3	0
e_4	0
e_5	0
v_3	−1

$$v_4 = v_1 + v_2 - v_3$$

Válasz: A munkatárs nem érdemli meg a fizetését.

Példa.

Látván az előző munkatárs kudarcát, a bank vezérigazgatója ezúttal 5 munkatársat bíz meg azzal, hogy 5 különböző új portfóliót dolgozzanak ki. Megérdemli-e a vezérigazgató a fizetését?

Válasz: Nem, a vezérigazgató nem érdemli meg a fizetését.

Tétel (Kronecker–Capelli-tétel).

Az

$$\begin{cases} a_{1,1}\cdot x_1 & + & \dots & + & a_{1,n}\cdot x_n & = & b_1 \\ & & & & & \vdots & \\ a_{m,1}\cdot x_1 & + & \dots & + & a_{m,n}\cdot x_n & = & b_m \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha

$$r(A) = r(A \mid \mathrm{b}),$$

ahol $A = (a_{i,j})_{m\times n}$ (a LER mátrixa) és

$(A \mid \mathrm{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$ (a LER bővített mátrixa).

Példa.

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y + z = -1 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

$$(A \mid \mathrm{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$r(A \mid \mathrm{b}) = r(A) = 2$$

Az egyenletrendszer megoldható.

Példa.

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y + z = -1 \\ x + 2y + z = 7 \end{cases}$$

$$(A \mid \mathrm{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$r(A \mid \mathrm{b}) = 3 \quad \text{és} \quad r(A) = 2$$

Az egyenletrendszer nem megoldható.

Megjegyzés.

Ha $r(A \mid \mathrm{b}) \neq r(A)$, akkor

$$r(A \mid \mathrm{b}) = r(A) + 1.$$

Igaz vagy Hamis?

- A síkon a $\underline{0}$ vektor koordinátasora mindig $(0, 0)$ függetlenül a bázis választásától.

Igaz, a bázis mindig lineárisan független vektorrendszer, így csak a triviális lineáris kombináció ad $\underline{0}$-t.

- Ha $r(A) \neq r(A|b)$, akkor az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer megoldható.

Hamis, $r(A) = r(A|b)$ esetén oldható meg az egyenletrendszer.