8. Előadás

Definíció: lineárisan függő vektorrendszer.

A V valós vektortérbeli $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer **lineárisan függő**, ha van olyan nemtriviális lineáris kombinációja, amely a zérusvektorral egyenlő, azaz vannak olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ skalárok, amelyek nem mind 0-ák, de $\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n = \underline{0}$.

Definíció: lineárisan független vektorrendszer.

A $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer **lineárisan független**, ha nem lineárisan függő, azaz ha a $v_1, \dots, v_n$ vektorok lineáris kombinációja csak úgy állítja elő a $\underline{0}$ vektort, ha minden skalár nulla.

Tétel (lin. független vektorr. részrendszerei)**.**

Ha egy vektorrendszer lineárisan független, akkor bármely részrendszere is az.

Indoklás.

Ha az összes vektorból nem lehet előállítani a $\underline{0}$ vektort a triviálistól különböző módon, akkor kevesebb vektorból sem.

Következmény.

Ha egy vektorrendszer valamely részrendszere lineárisan függő, akkor a teljes vektorrendszer is az.

Példa.

Egy lineárisan függő vektorrendszer részrendszerei között már lehetnek lineárisan függetlenek.

- Az $(1,-3)^T,(2,-6)^T$ vektorrendszer lineárisan függő, de az $(1,-3)^T$ részrendszere lineárisan független.
- A $(0,0,0)^T,(1,1,1)^T,(2,2,2)^T,(1,1,2)^T$ vektorrendszer lineárisan függő, azonban az $(1,1,1)^T$ részrendszere lineárisan független, sőt az $(1,1,1)^T,(1,1,2)^T$ vektorrendszer is lineárisan független.

Definíció: maximális lineárisan független részrendszer.

Vektorrendszer **maximális lineárisan független részrendszerének** nevezzük egy olyan lineárisan független részrendszerét, amely már nem bővíthető tovább úgy, hogy a részrendszer továbbra is lineárisan független maradjon.

Példa.

- Az $(1,-3)^T, (2,-6)^T$ vektorrendszernek maximális lineárisan független részrendszere az $(1,-3)^T$, de ugyanígy a $(2,-6)^T$ is maximális lineárisan független részrendszer.
- A $(0,0,0)^T, (1,1,1)^T, (2,2,2)^T, (1,1,2)^T$ vektorrendszernek maximális lineárisan független részrendszere az $(1,1,1)^T, (1,1,2)^T$ vektorrendszer, de nem az egyetlen, mivel $(2,2,2)^T, (1,1,2)^T$ is az.

Definíció: vektorrendszer rangja.

Vektorrendszer **rangjának** nevezzük a maximális lineárisan független részrendszereinek közös elemszámát. Tehát a vektorrendszer rangja r, ha kiválasztható r-elemű lineárisan független részrendszer, de $(r+1)$-elemű már nem.

Példa.

- A $(0,0,0)^T$ vektorrendszer rangja 0.
- Az $(1,1,1)^T, (2,2,2)^T, (3,3,3)^T$ vektorrendszer rangja 1.
- Az $(1,1,1)^T, (1,-1,1)^T, (2,-2,2)^T$ vektorrendszer rangja 2. Maximális lineárisan független részrendszerei: $(1,1,1)^T, (1,-1,1)^T$ és $(1,1,1)^T, (2,-2,2)^T$.
- Az $(1,1,1)^T, (0,-1,1)^T, (0,0,2)^T$ vektorrendszer rangja 3, mivel a vektorrendszer lineárisan független.

Tétel.

Legyen V valós vektortér.

- A $v_1, \dots, v_n \in V$ vektorrendszer rangja legfeljebb n, és pontosan akkor n, ha a vektorrendszer lineárisan független.
- Ha egy vektorrendszer rangja r, akkor r darab lineárisan független vektort kiválasztva belőle, a vektorrendszer minden tagja előáll ezek lineáris kombinációjaként.
- Vektorrendszer rangja nem változik, ha
  - bővítjük egy olyan vektorral, amely előáll a vektorrendszer vektorainak lineáris kombinációjaként.
  - elhagyunk belőle egy olyan vektort, amely előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.
  - valamely vektorához hozzáadjuk egy másik vektorának többszörösét, vagy ha valamely vektorát 0-tól különböző valós számmal szorozzuk meg.

Tétel.

Legyen V valós vektortér, $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_n \in V$. Ha a $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer elemeinek lineáris kombinációjaként előáll az $u_1, \ldots, u_k$ vektorok mindegyike, akkor az $u_1, \ldots, u_k$ vektorrendszer rangja kisebb vagy egyenlő, mint a $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer rangja.

Tétel (Rangszámítás Gauss-eliminációval).

Az $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendszer rangját meghatározhatjuk Gauss-eliminációval:

- A vektorrendszer vektorait beírjuk egy mátrix soraiba vagy oszlopaiba.
- Gauss-eliminációval meghatározzuk a mátrix lépcsős alakját.
- A lépcsős alakban szereplő nem csupa 0 sorok száma adja meg a vektorrendszer rangját.

Megjegyzés.

Ha a Gauss-elimináció elvégzése után nemcsak a vektorrendszer rangjára vagyunk kíváncsiak, hanem egy maximális lineárisan független részrendszert is szeretnénk megadni, akkor, ha a mátrix soraiba írjuk a vektorokat, akkor a sorokon, ha az oszlopaiba, akkor az oszlopokon végezzük az elemi átalakításokat. Továbbá a Gauss-elimináció elvégézése után figyelnünk kell, hogy a lépcsős alak nem csupa 0 sorainak/oszlopainak melyik eredeti vektor felel meg, mert a sorcsere/oszlopcsere esetén változhat a sorrend.

Példa.

Számítsuk ki az $(1,-1,1,1)^T$, $(-1,2,1,1)^T$, $(0,1,2,2)^T$, $(-1,1,1,1)^T$, $(-1,2,3,3)^T$, $(0,-1,0,0)^T$ vektorrendszer rangját.

- A vektorokat az A mátrix soraiba írjuk:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Példa (folyt.).

- Az $(1,-1,1,1)^T$, $(-1,2,1,1)^T$, $(0,1,2,2)^T$, $(-1,1,1,1)^T$, $(-1,2,3,3)^T$, $(0,-1,0,0)^T$ vektorrendszer rangja 3.
- A megoldás során sorcserét is hajtottunk végre, az első három vektor nem alkot maximális lineárisan független részrendszert.
- Egy maximális lineárisan független részrendszere például:

$$(1,-1,1,1)^T, (-1,2,1,1)^T, (-1,1,1,1)^T.$$

Tétel (Rangszámítás EBT-vel)**.**

- A vektorokat beírjuk az EBT-táblázat **oszlopaiba**, majd elemi bázistranszformációt hajtunk végre, ameddig tudunk.
- A generáló elem oszlopát el lehet hagyni, sőt akár a sorokat is!
- A sorokba bevitt oszlopcímkék adják az eredeti vektorrendszer egy maximális lineárisan független részrendszerét, a számuk pedig a rangot.

Példa.

Számítsuk ki a $v_1 = (1, -1, 2, 1, 2)^T$, $v_2 = (-1, 1, 1, 0, 1)^T$, $v_3 = (1, 2, 1, -1, -1)^T$, $v_4 = (1, 2, 4, 0, 2)^T$, $v_5 = (3, 0, 2, 0, 0)^T$ vektorrendszer rangját, és adjunk meg benne maximális lineárisan független részrendszert.

0.	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
e_1	1^*	-1	1	1	3
e_2	-1	1	2	2	0
e_3	2	1	1	4	2
e_4	1	0	-1	0	0
e_5	2	1	-1	2	0

1.	v_2	v_3	v_4	v_5
e_2	0	3	3	3
e_3	3	-1	2	-4
e_4	1^*	-2	-1	-3
e_5	3	-3	0	-6

2.	v_3	v_4	v_5
e_2	3^*	3	3
e_3	5	5	5
e_5	3	3	3

3.	v_4	v_5
e_3	0	0
e_5	0	0

A vektorrendszer rangja 3, egy maximális lineárisan független részrendszere:

$$v_1 = (1, -1, 2, 1, 2), v_2 = (-1, 1, 1, 0, 1), v_3 = (1, 2, 1, -1, -1).$$

Definíció: bázis.

Legyen V valós vektortér. A vektortér lineárisan független generátorrendszerét V **bázisának** nevezzük.

Példa.

A következő vektorrendszerek bázist alkotnak a megadott vektorterekben.

- Az $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, e_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)^T$ vektorrendszer a $V = \mathbb{R}^n$ vektortérben (e bázis a **standard bázis** $\mathbb{R}^n$-ben).
- Bármely három nem egy síkba eső vektor a térben.
- Az $(\sqrt{2}, 1, 1)^T, (1, \sqrt{3}, 1)^T, (1, 1, \sqrt{5})^T$ vektorrendszer $\mathbb{R}^3$-ban.

Definíció: véges dimenziós/végesen generált vektortér.

A V vektorteret **véges dimenziósnak**/**végesen generáltnak** nevezzük, ha van véges generátorrendszere.

Példa.

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér véges dimenziós, mivel az $e_1, \ldots, e_n$ standard bázis generátorrendszere.

Tétel.

Véges dimenziós vektortér bármely két bázisa azonos elemszámú.

Definíció: dimenzió.

A V véges dimenziós vektortér **dimenzióján** bázisainak közös elemszámát értjük.

Megjegyzés.

Az előző tétel alapján ez a szám egyértelműen meghatározott, és nem függ a bázis választásától.

Példa.

Az $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ vektortér n-dimenziós, az $e_1, \ldots, e_n$ *standard bázis* bázisa e vektortérnek:

$$e_\ell = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T \quad (1 \leqslant \ell \leqslant n).$$

Jelölés.

A V végesen generált valós vektortér dimenzióját $\dim(V)$ jelöli. Pl.: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ és $\dim(\{\underline{0}\}) = 0$.

Tétel (Dimenzió és rang).

Legyen V valós vektortér, $v_1, \ldots, v_n \in V$. A $[v_1, \ldots, v_n]$ altér dimenziója megegyezik a $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer rangjával. A $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer maximális lineárisan független részrendszerei bázisai ezen altérnek.

Tétel (Lineárisan független vektorrendszerek és bázisok).

Ha a V vektortér dimenziója n, akkor

- bármely n-elemű lineárisan független vektorrendszere bázisa V-nek,
- bármely n-elemű generátorrendszere bázisa V-nek.

Bázis megadása generált altérben (EBT-vel).

Legyen $U = [v_1, \ldots, v_k]$ altér a V valós vektortérben.

1. EBT-vel meghatározzuk, hogy (maximálisan) hány darab vektor vonható be a bázisba a $v_1, \ldots, v_k$ vektorok közül.
2. Bázisba bevont vektorok bázist alkotnak az U altérben, számuk az altér dimenziójával egyezik meg.

VAGY

Bázis megadása generált altérben (Gauss-eliminációval).

Legyen $U = [v_1, \ldots, v_k]$ altér a V valós vektortérben.

1. A generátorrendszer vektorait beírjuk az A mátrix soraiba.
2. A sorokon végzett elemi átalakításokkal (!!!) meghatározzuk a mátrix lépcsős alakját.
3. A nem csupa 0 sorvektorok az U altér egy bázisát adják.

Példa.

Legyen $U = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5]$, ahol $u_1 = (-5, 7, 16, 7, 1)^T$, $u_2 = (1, 2, 1, 2, -1)^T$, $u_3 = (1, 8, 13, 8, -7)^T$, $u_4 = (-1, 1, 2, 1, 1)^T$, $u_5 = (1, 1, -2, 1, 1)^T$. Határozzuk meg U dimenzióját.

0.	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
e_1	-5	1^*	1	-1	1
e_2	7	2	8	1	1
e_3	16	1	13	2	-2
e_4	7	2	8	1	1
e_5	1	-1	-7	1	1

1.	u_1	u_3	u_4	u_5
e_2	17	6	3	-1^*
e_3	21	12	3	-3
e_4	17	6	3	-1
e_5	-4	-6	0	2

2.	u_1	u_3	u_4
e_3	-30	-6	-6
e_4	0	0	0
e_5	30	6	6^*

3.	u_1	u_3
e_3	0	0
e_4	0	0

Az $u_1, \ldots, u_5$ vektorrendszer rangja 3, az u_2, u_4, u_5 vektorok lineárisan függetlenek, amelyek az U altér bázisát alkotják, $\dim(U) = 3$.

Példa.

Legyen $U = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5]$, ahol $u_1 = (-5, 7, 16, 7, 1)^T$, $u_2 = (1, 2, 1, 2, -1)^T$, $u_3 = (1, 8, 13, 8, -7)^T$, $u_4 = (-1, 1, 2, 1, 1)^T$, $u_5 = (1, 1, -2, 1, 1)^T$. Határozzuk meg U dimenzióját.

$$\begin{pmatrix} -5 & 7 & 16 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 13 & 8 & -7 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Az $u_1, \ldots, u_5$ vektorrendszer rangja 3, az $(1, 0, 0, 0, -2)^T, (0, 1, 0, 1, 1)^T, (0, 0, 1, 0, -1)^T \in U$ vektorok lineárisan függetlenek, amelyek az U altér bázisát alkotják, $\dim(U) = 3$.

Tétel (Lineáris függetlenség, generátorrendszer, bázis és rang).

Legyen V n-dimenziós vektortér és $v_1, \ldots, v_k \in V$ vektorrendszer, melynek rangja r. Ekkor a következők érvényesek:

1. $r \leqslant n, k$,
2. a vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha $r = k$,
3. a vektorrendszer pontosan akkor generátorrendszere V-nek, ha $r = n$,
4. a vektorrendszer pontosan akkor bázisa V-nek, ha $r = k = n$.

Példa.

Döntsük el, hogy az ($\mathbb{R}^4$-beli)

$$(1,-1,2,1)^T, (-3,1,0,2)^T, (1,1,-1,2)^T, (-1,1,1,5)^T$$

vektorrendszer lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e $\mathbb{R}^4$-ben.

Az $\mathbb{R}^4$ vektortér dimenziója 4 ($n = 4$), a vektorrendszernek 4 eleme van ($k = 4$). Ki kellene számolni még a vektorrendszer rangját.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A vektorrendszer rangja $r = 3$. A vektorrendszer nem lineárisan független, nem generátorrendszer és nem bázis.

Tétel.

Legyenek U_1 és U_2 alterek a V vektortérben, amelyekre $U_1 \subseteq U_2$ teljesül. Ekkor

- $\dim(U_1) \leqslant \dim(U_2)$,
- $U_1 = U_2$ pontosan akkor teljesül, ha $\dim(U_1) = \dim(U_2)$.

Definíció: (komplexus) összeg.

Ha U_1 és U_2 alterek a V valós vt.-ben, akkor (komplexus) összegük:

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}.$$

Tétel.

Ha $U_1, U_2 \leqslant V$, akkor $U_1 + U_2 \leqslant V$.

Tétel (Alterek összegének generátorrendszere).

Ha $U_1 = [u_1, \ldots, u_m]$ és $U_2 = [v_1, \ldots, v_n]$ alterek a V vektortérben, akkor

$$U_1 + U_2 = [u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n].$$

Tétel (Alterek dimenziótétele).

Legyenek U_1 és U_2 alterek a V végesen generált valós vektortérben. Ekkor

$$\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2).$$

Igaz vagy Hamis?

- Van olyan $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendszer, amelynek a rangja nagyobb mint n.

Hamis, $\mathbb{R}^n$-ben bármely vektorrendszer rangja legfeljebb n. Ha EBT-vel számolunk, $e_1, \ldots, e_n$ bázisvektorok helyére visszük be a vektorrendszer elemeit, tehát maximum n vektor vihető be a bázisba.