7. Előadás

Alterek

Definíció: Valós vektortér.

Az $(\mathbb{R}^n; +, \alpha \cdot (\alpha \in \mathbb{R}))$ struktúrát nevezzük a **(valós) szám-n-esek vektorterének**.

Definíció: altér.

A V vektortér U nemüres részhalmaza **altere** V-nek, ha zárt az összeadásra és a valós számmal történő szorzásra nézve, azaz bármely két U-beli vektor összege U-ban van (ha $u, v \in U$, akkor $u + v \in U$) és tetszőleges valós számmal szorozva bármely U-beli vektort ismét U-beli vektort kapunk (ha $u \in U$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $\alpha \cdot u \in U$). Jel.: $U \leqslant V$.

Megjegyzés.

Ha $\underline{0} \notin U$, akkor U nem altér.

Megjegyzés.

Az alterek maguk is (valós) vektorterek, így bármi, amit vektorterekről mondunk, vonatkozni fog azok altereire is.

Példa.

- Tetszőleges V vektortérben $\{\underline{0}\}$ és V alterek (**triviális alterek**).
- A $V = \mathbb{R}^2$ vektortérben az $U = \left\{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geqslant 0\right\}$ részhalmaz nem altér, mert $(2,3)^T \in U$, $-1 \in \mathbb{R}$, de $(-1) \cdot (2,3)^T = (-2,-3)^T \notin U$ (azaz U nem zárt a skalárokkal való szorzásra).
  - Az $\mathbb{R}^2$ vektortér azonosítható a síkkal, ekkor U éppen a pozitív síknegyed.
- A $V = \mathbb{R}^2$ vektortérben az $U = \left\{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geqslant 0\right\}$ részhalmaz nem altér, mert $(2,4)^T, (-3,-2)^T \in U$, de $(2,4)^T + (-3,-2)^T = (-1,2)^T \notin U$ (azaz U nem zárt a vektorok összeadására vonatkozóan).

Megjegyzés (Egy kis geometria: a sík).

A 2-dimenziós síkon, azaz $\mathbb{R}^2$-ben az alterek a következők:

- a teljes sík maga,
- az origón ($O = (0, 0)$-án) átmenő egyenesek,
- az origót tartalmazó egyelemű halmaz.

A fenti alterekhez intuitív módon hozzá tudunk rendelni nemnegatív egész számokat, a dimenziójukat. A kérdés, hogy ez a dimenzió matematikai fogalom-e.

Megjegyzés (Alterek megadása).

1. Bizonyos vektorokból előállítható vektorok halmaza
   $\longrightarrow$ generált altér, generátorrendszer.
   Pl.: $\{\alpha \cdot u + \beta \cdot v : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.
2. Bizonyos tulajdonságú vektorok halmaza
   $\longrightarrow$ homogén lineáris egyenletrendszer (HLER) megoldásainak halmaza.
   Pl.: $\left\{(a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3 : a + b = 0,\ 2a - 3c = 0\right\}$.

Definíció: lineáris kombináció.

A V vektortér $v_1, \ldots, v_n$ vektorainak az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ skalárokkal képzett **lineáris kombinációja** az

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \in V$$

vektor.

Példa.

A $v_1 = (1, 1, -1)^T, v_2 = (0, 1, 1)^T, v_3 = (0, 1, 1)^T$ vektorok $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$ és $\alpha_3 = 5$ skalárokkal képzett lineáris kombinációja:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 \\ &= 2 \cdot (1, 1, -1)^T + (-3) \cdot (0, 1, 1)^T + 5 \cdot (0, 1, 1)^T \\ &= (2, 4, 0)^T, \end{aligned}$$

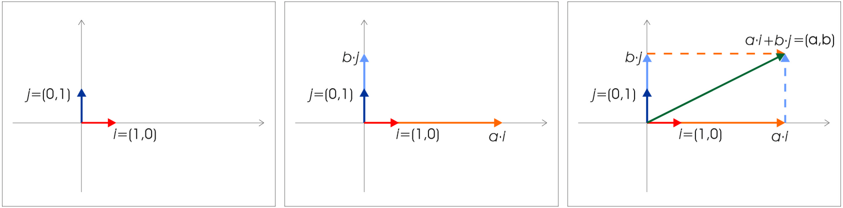
vagyis a $(2, 4, 0)^T$ vektor előáll az $(1, 1, -1)^T, (0, 1, 1)^T, (0, 1, 1)^T$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Megjegyzés.

Ha U altere a V vektortérnek, akkor tetszőleges $v_1, \ldots, v_n \in U$ vektorok tetszőleges lineáris kombinációja is U-beli vektor.

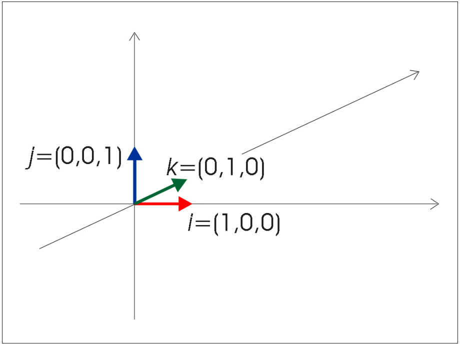
Megjegyzés (a vektorterek „mérése”).

1. Megközelítés. A síkon (az $\mathbb{R}^2$ valós vektortérben) 2 vektor szükséges és elegendő is ahhoz, hogy ezek lineáris kombinációjaként az összes többi vektort előállítsuk:



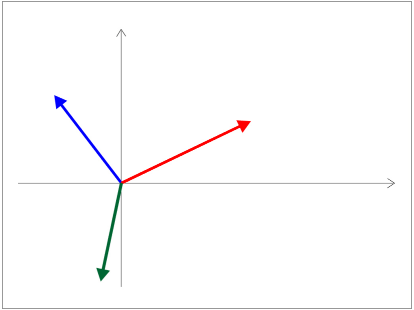
Megjegyzés (a vektorterek „mérése").

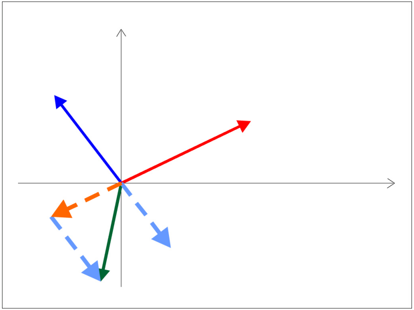
A térben azonban 3 vektor kell ehhez.



Megjegyzés (a vektorterek „mérése”).

2. Megközelítés. A síkon bárhogy adunk meg 3 vektort, azok között lesz olyan, amely a másik kettő által „kifeszített” síknak (vagy egyenesnek) az eleme, míg térben ez nem teljesül. Ezen gondolatmenet precízzé tétele vezet a *lineáris függetlenség* fogalmához.





Definíció: generált altér.

Legyen V valós vektortér. A $v_1, \dots, v_n \in V$ vektorok által **generált altér** a legszűkebb olyan altér, amely tartalmazza a $v_1, \dots, v_n$ vektorokat. Jel.: $[v_1, \dots, v_n]$.

Tétel.

Legyen V vektortér, $v_1, \dots, v_n \in V$. Ekkor a $v_1, \dots, v_n$ vektorok által generát altér elemei éppen a $v_1, \dots, v_n$ vektorok összes lineáris kombinációit tartalmazó halmaz, azaz

$$[v_1, \dots, v_n] = \{\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

Definíció: generátorrendszer.

A $v_1, \ldots, v_n \in V$ vektorrendszer **generátorrendszer** a V vektortérben, ha

$$V = [v_1, \ldots, v_n].$$

Példa.

Legyen $V = \mathbb{R}^4$ és $u = (1, -1, 0, 0)^T$, $v = (2, 3, 0, 0)^T$. Ekkor

$$\begin{aligned}
[u, v] &= \{\alpha \cdot u + \beta \cdot v : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{(\alpha, -\alpha, 0, 0)^T + (2\beta, 3\beta, 0, 0)^T : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{(\alpha + 2\beta, -\alpha + 3\beta, 0, 0)^T : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{(\alpha, \beta, 0, 0)^T : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.
\end{aligned}$$

Az u, v vektorrendszer nem generátorrendszer.

Példa.

Döntsük el, hogy a $v = (2, 0, 3)^T$ vektor eleme-e a $V = \mathbb{R}^3$ vektortér $U = [(1, -1, 1)^T, (1, 1, 2)^T]$ alterének. Az előző tétel szerint $(2, 0, 3)^T \in [(1, -1, 1)^T, (1, 1, 2)^T]$ pontosan akkor teljesül, ha a $(2, 0, 3)^T$ vektor előáll az $(1, -1, 1)^T, (1, 1, 2)^T$ vektorok lineáris kombinációjaként, vagyis ha vannak olyan α és β skalárok, hogy

$$(2, 0, 3)^T = \alpha \cdot (1, -1, 1)^T + \beta \cdot (1, 1, 2)^T,$$

azaz

$$(2, 0, 3)^T = (\alpha + \beta, -\alpha + \beta, \alpha + 2\beta)^T.$$

Példa (folyt.).

A

$$(2,0,3)^T = (\alpha+\beta, -\alpha+\beta, \alpha+2\beta)^T$$

vektoregyenlőség pedig azt jelenti, hogy

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & = & 2, \\ -\alpha & + & \beta & = & 0, \\ \alpha & + & 2\beta & = & 3. \end{array}\right.$$

0.	α	β	b
e_1	1^*	1	2
e_2	-1	1	0
e_3	1	2	3

1.	β	b
α	1	2
e_2	2	2
e_3	1^*	1

2.	b
α	1
e_2	0
β	1

Az egyenletrendszer megoldható, azaz $v \in U$, sőt,

$$v = 1 \cdot (1,-1,1)^T + 1 \cdot (1,1,2)^T.$$

Példa (folyt.).

A

$$(2,0,3)^T = (\alpha+\beta, -\alpha+\beta, \alpha+2\beta)^T$$

vektoregyenlőség pedig azt jelenti, hogy

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2, \\ -\alpha + \beta = 0, \\ \alpha + 2\beta = 3. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Az egyenletrendszer megoldható, azaz $v \in U$, sőt,

$$v = 1 \cdot (1,-1,1)^T + 1 \cdot (1,1,2)^T.$$

Példa.

Döntsük el, hogy a $v = (2, 0, 3)^T$ vektor eleme-e a $V = \mathbb{R}^3$ vektortér $U = [u_1, u_2]$ alterének, ahol $u_1 = (1, -1, 1)^T$ és $u_2 = (1, 1, 2)^T$.

EBT

0.	u_1	u_2	v
e_1	1	1	2
e_2	-1	1	0
e_3	1	2	3

$\ldots$

$\ldots$

2.	b
α	1
e_2	0
β	1

GE

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \ldots$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A táblázat oszlopai éppen a feladatbeli vektorokat tartalmazzák.

Példa.

Igaz-e, hogy a $v = (8, 76, 51, 74)^T \in \mathbb{R}^4$ vektor eleme az $U = [u_1, \dots, u_5] \leqslant \mathbb{R}^4$ altérnek, ahol $u_1 = (0, 8, 9, 6)^T$, $u_2 = (1, 2, 2, 2)^T$, $u_3 = (1, 4, 5, 6)^T$, $u_4 = (1, 8, 4, 8)^T$, $u_5 = (1, 8, 6, 7)^T$? A szükséges lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát (EBT-táblázatát) közvetlenül fel tudjuk írni:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & v \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 8 & 2 & 4 & 8 & 8 & 76 \\ 9 & 2 & 5 & 4 & 6 & 51 \\ 6 & 2 & 6 & 8 & 7 & 74 \end{array}\right) \end{array} \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 19/52 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 15/26 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/52 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 29/52 & 7 \end{array}\right)$$

$$v \in U \quad \text{és} \quad v = 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 + 7 \cdot u_4 + 0 \cdot u_5$$

Lineáris függőség vagy függetlenség

Definíció: triviális lineáris kombináció.

Legyen V valós vektortér, $v_1, \dots, v_n \in V$. Ekkor a

$$0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$$

lineáris kombinációt, a $v_1, \dots, v_n$ vektorok **triviális lineáris kombinációjának** nevezzük.

Definíció: lineáris függő vektorrendszer.

A V valós vektortérbeli $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer **lineárisan függő**, ha van olyan nemtriviális lineáris kombinációjuk, amely a zérusvektorral egyenlő, azaz vannak olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ skalárok, amelyek nem mind 0-ák, de $\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n = \underline{0}$.

Példa.

Legyen V az $\mathbb{R}^3$ valós vektortér. Az alábbi vektorrendszer lineárisan függő:

- $(1,1,1)^T, (0,0,0)^T$

$$0 \cdot (1,1,1)^T + 1 \cdot (0,0,0)^T = (0,0,0)^T.$$

Tétel (A lineáris függőség „alapesetei").

- Ha egy vektorrendszer tartalmazza a $\underline{0}$ vektort, akkor lineárisan függő.

Példa.

Legyen V az $\mathbb{R}^3$ valós vektortér. Az alábbi vektorrendszer lineárisan függő:

- $(3,3,3)^T, (-5,-5,-5)^T$

$$5 \cdot (3,3,3)^T + 3 \cdot (-5,-5,-5)^T = (0,0,0)^T.$$

Tétel (A lineáris függőség „alapesetei").

- Ha egy vektorrendszer két vektora arányos, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.

Tétel (A lineáris függőség „alapesetei”)**.**

- Ha egy vektorrendszer tartalmazza a $\underline{0}$ vektort, akkor lineárisan függő.
- Ha egy vektorrendszer két vektora arányos, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.

Példa.

Legyen V az $\mathbb{R}^3$ valós vektortér. Az alábbi vektorrendszer lineárisan függő:

- $(2, 0, 1, 8)^T, (0, 4, 0, 4)^T, (-6, 16, -3, -8)^T$

$$(-3) \cdot (2, 0, 1, 8)^T + 4 \cdot (0, 4, 0, 4)^T = (-6, 16, -3, -8)^T.$$

Tétel.

Egy vektorrendszer pontosan akkor lineárisan függő, ha a vektorrendszer valamelyik vektora előáll a többi lineáris kombinációjaként.

Tétel.

Lépcsős alakú mátrix nem csupa 0 soraiból alkotott vektorrendszer nem lineárisan függő.

Definíció: lineárisan független vektorrendszer.

Legyen V valós vektortér, $v_1, \ldots, v_n \in V$. A $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer **lineárisan független**, ha nem lineárisan függő.

Megjegyzés.

Azaz,

- ha a $\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = \underline{0}$ egyenlőségből következik, hogy $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$,
- ha a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok lineáris kombinációja csak úgy állítja elő a $\underline{0}$ vektort, ha minden skalár nulla.

Példa.

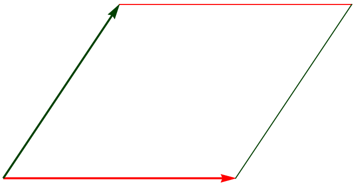
- Az $(1,1,1)^T$ vektorrendszer lineárisan független, hiszen ha $\alpha \cdot (1,1,1)^T = (0,0,0)^T$, akkor szükségképpen $\alpha = 0$.
- Az $(1,-1,0)^T, (0,1,1)^T$ vektorrendszer lineárisan független, hiszen ha

$$\underbrace{\alpha \cdot (1,-1,0)^T + \beta \cdot (0,1,1)^T}_{(\alpha,-\alpha+\beta,\beta)^T} = (0,0,0)^T,$$

akkor az első komponens miatt $\alpha = 0$, a harmadik miatt pedig $\beta = 0$.

Példa (Lineáris függetlenség $\mathbb{R}^2$-ben).

Ha $v_2 \neq \underline{0}$, akkor $\mathbb{R}^2$-ben a v_1, v_2 vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha nincs olyan α skalár, amelyre $v_1 = \alpha \cdot v_2$ teljesül. Azaz, a két vektor nem esik egy egyenesbe.

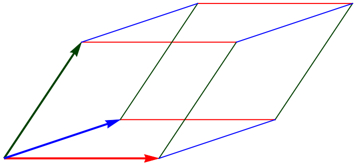


Megjegyzés.

Az előző állítás nemcsak $\mathbb{R}^2$-ben, hanem $\mathbb{R}^n$-ben is érvényes.

Példa (Lineáris függetlenség $\mathbb{R}^3$-ban).

A térben a v_1, v_2, v_3 helyvektorok által alkotott vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha az általuk meghatározott paralelepipedon térfogata nem 0, azaz nem esnek egy síkba.



Példa (Lineáris függetlenség $\mathbb{R}^3$-ban (folyt.)).

Az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben a v_1, v_2, v_3 vektorok által kifeszített paralelepipedon V térfogata kiszámítható a vektorok komponenseiből kialakított (3×3)-as mátrix determinánsának segítségével. Ha $v_1 = (a_1, b_1, c_1)^T$, $v_2 = (a_2, b_2, c_2)^T$ és $v_3 = (a_3, b_3, c_3)^T$, valamint

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

akkor $V = |D|$ (abszolútérték). Továbbá, $V \neq 0$ pontosan akkor teljesül, ha a v_1, v_2, v_3 vektorrendszer lineárisan független.

Az előzőeket általánosítva kapjuk az alábbi állítást.

Tétel (A lineáris függetlenség és a determináns)**.**

Az $\mathbb{R}^n$-beli $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független, ha a vektorok komponenseiből alkotott $(n \times n)$-es mátrix determinánsa nem 0.

Az előadáson elhangzó fogalmakat szemlélteti $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ vektorterek esetén a következő angol nyelvű videó, amely az előadáson magyar nyelvű magyarázattal szerepel:

https://youtu.be/k7RM-ot2NWY?t=179

Igaz vagy Hamis?

- Minden vektortérnek van altere.

Igaz, például a triviális alterek: V vektortérben $\{\underline{0}\}$ és V alterek.

- A síkon legalább 3 vektor kell, hogy lineáris kombinációjukként a sík összes vektora előálljon.

Hamis, elég 2 lineárisan független vektor, például $(1, 2)$, $(1, 3)$.