6. Előadás

A Leontief-féle Input/Output modell

Példa.

Tegyük fel, hogy egy gazdaság 3 fő ágazatból áll: mezőgazdaság, ipar és szállítás. Az egyes ágazatok 1 egységnyi termék előállításához mindhárom ágazat termékeit felhasználják:

	Egységnyi termékre eső felhasználás		
	Mezőgazdaság	Ipar	Szállítás
Mezőgazdaság	0.30	0.30	0.20
Ipar	0.20	0.10	0.20
Szállítás	0.00	0.20	0.20

a táblázat oszlopai megmutatják, hogy 1 egységnyi termék előállításához mennyi termékre van szükség az egyes ágazatoktól.

Példa (folyt.).

A fenti gazdaság ráfordítási mátrixa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} M & I & Sz \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ I \\ Sz \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \end{array},$$

amelynek oszlopai megmutatják, hogy 1 egységnyi termék előállításához mennyi termékre van szükség az egyes ágazatoktól.

Definíció: ráfordítási mátrix.

Egy gazdaság egyes ágazatai közötti kapcsolatokat leíró mátrixot a gazdaság **ráfordítási mátrixnak** hívjuk. A ráfordítási mátrix oszlopai mutatják, hogy 1 egységnyi termék előállításához mennyi termékre van szükség az egyes ágazatoktól.

Megjegyzés (Row, or column, that is the question.).

- Amennyiben a sorok mutatják, hogy az egyes ágazatoknak mennyi nyersanyagra van szüksége, akkor mindent transzponálni kell.
- Mindig tisztában kell lenni azzal, hogy sorokban vagy oszlopokban gondolkodunk!

Példa.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} M & I & Sz \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ I \\ Sz \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ha 1 egységnyi M, 3 egységnyi I és 2 egységnyi Sz terméket szeretnénk legyártani, akkor mennyi termékre van szükség? Például az M termékből

$$1 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.2 = 1.7$$

egységnyi szükséges, azonban ezen termékeket is elő kell állítani, és ahhoz szintén valamennyi terméket fel kell használni, stb.

Nettó és bruttó kibocsátás

Definíció: nettó kibocsátás.

Az a termékmennyiség, amelyet az adott gazdaságnak elő kell állítania (felfogható megrendelésként).

Definíció: (nettó kibocsátáshoz tartozó) bruttó kibocsátás.

Az a termékmennyiség, amelyet a gazdaságnak ÖSSZESEN elő kell állítania ahhoz, hogy a nettó kibocsátást elő tudja állítani.

Probléma.

Hogyan lehet meghatározni a bruttó kibocsátást?

Definíció: A Leontief-féle Input/Output modell.

Legyen $\mathcal{G}$ olyan gazdaság, amely n darab ágazatot foglal magában és ráfordításai mátrixa $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ekkor

$$\underbrace{\mathrm{x}}_{\text{bruttó kibocsátás}} = \underbrace{C\mathrm{x}}_{\text{közbülső kibocsátás}} + \underbrace{\mathrm{d}}_{\text{nettó kibocsátás}},$$

ahol $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ és $\mathrm{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$.

Megjegyzés (a Leontief-féle Input/Output modellhez).

Mivel $\mathbf{x} = E_n\mathbf{x}$, ezért

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d} &\iff E_n\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d} \\ &\iff E_n\mathbf{x} - C\mathbf{x} = \mathbf{d} \\ &\iff (E_n - C)\mathbf{x} = \mathbf{d} \\ &\iff \mathbf{x} = (E_n - C)^{-1}\mathbf{d}, \end{aligned}$$

ha $E_n - C$ invertálható.

Definíció: Leontief-inverz.

Legyen $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tetszőleges mátrix. Az $E_n - C$ mátrix inverzét, amennyiben létezik, a C mátrix **Leontief-inverzének** nevezzük.

Megjegyzés (a lehetséges ideológia az elmélet mögött).

	Elérendő kibocsátás	Szükséges termékm.
1. kör	d	$C\mathrm{d}$
2. kör	$C\mathrm{d}$	$C(C\mathrm{d}) = C^2\mathrm{d}$
3. kör	$C^2\mathrm{d}$	$C(C^2\mathrm{d}) = C^3\mathrm{d}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Ekkor az x bruttó kibocsátás:

$$\begin{aligned} \mathrm{x} &= \mathrm{d} + C\mathrm{d} + C^2\mathrm{d} + \dots \\ &= (E + C + C^2 + \dots)\mathrm{d}. \end{aligned}$$

Mivel

$$(E - C)(E + C + C^2 + \dots + C^m) = E - C^{m+1},$$

ezért

$$(E - C)^{-1} \approx E + C + \dots + C^m,$$

ha a C mátrixnak létezik a Leontief inverze, és $C^m \to 0$ $(m \to \infty)$.

Példa.

Tekintsük az első Példában látott gazdaságot, amelynek ráfordítási mátrixa: $C = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$. Ekkor C-nek létezik Leontief-inverze

$$(E_3 - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.3 & -0.2 \\ -0.2 & 0.9 & -0.2 \\ 0.0 & -0.2 & 0.8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.62 & 0.67 & 0.57 \\ 0.38 & 1.33 & 0.43 \\ 0.10 & 0.33 & 1.36 \end{pmatrix}.$$

Az $E_3 + C + \cdots + C^m$ $(m = 1, 2, 4, 8)$ mátrixok rendre az alábbiak:

$$\begin{pmatrix} 1.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 1.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 1.2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.45 & 0.46 & 0.36 \\ 0.28 & 1.21 & 0.30 \\ 0.04 & 0.26 & 1.28 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.57 & 0.60 & 0.51 \\ 0.35 & 1.23 & 0.39 \\ 0.08 & 0.31 & 1.33 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.61 & 0.66 & 0.57 \\ 0.38 & 1.33 & 0.43 \\ 0.09 & 0.33 & 1.36 \end{pmatrix}.$$

Tétel.

Legyen $\mathcal{G}$ olyan gazdaság, melynek n ágazata van ($n \in \mathbb{N}$), valamint legyen $C \in (\mathbb{R}_0^+)^{n \times n}$ a ráfordítási mátrixa e gazdaságnak. Ekkor az $\mathrm{x} = C\mathrm{x} + \mathrm{d}$ egyenletnek akkor és csak akkor van tetszőleges $\mathrm{d} \geqslant 0$ esetén $\mathrm{x} \geqslant 0$ megoldása, ha $(E - C)^{-1}$ létezik, minden eleme nemnegatív, és $C^m \to 0$, ha $m \to \infty$.

Definíció: műköődőképesség.

Ha $\mathcal{G}$ olyan gazdaság, ahol az $\mathrm{x} = C\mathrm{x} + \mathrm{d}$ egyenletnek tetszőleges $\mathrm{d} \geqslant 0$ esetén van $\mathrm{x} \geqslant 0$ megoldása, azaz $\mathcal{G}$ tetszőleges megrendelést ki tud elégíteni (elméletileg), akkor **működőképesnek** nevezzük.

Megjegyzés.

Feladatmegoldásnál a működőképesség vizsgálatánál csak azt ellenőrizük, hogy teljesül-e, hogy az $(E - C)^{-1}$ Leontief-inverz minden eleme nemnegatív.

Tétel.

Legyen C egy gazdaság ráfordítási mátrixa, d a nettó kibocsátás vektora. Ha C és d minden komponense nemnegatív, valamint a gazdaság működőképes, akkor az x **bruttó kibocsátás**:

$$\mathrm{x} = (E - C)^{-1}\mathrm{d},$$

ezen (oszlop)vektor minden komponense nemnegatív, és x az egyetlen megoldása az $\mathrm{x} = C\mathrm{x} + \mathrm{d}$ egyenletnek.

Példa.

Tekintsük az első Példában látott gazdaságot, amelynek ráfordítási mátrixa:

$$C = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad (E_3 - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.62 & 0.67 & 0.57 \\ 0.38 & 1.33 & 0.43 \\ 0.10 & 0.33 & 1.36 \end{pmatrix},$$

tehát a gazdaság működőképes. Ha 1 egységnyi M, 3 egységnyi I és 2 egységnyi Sz terméket szeretnénk legyártani, akkor a nettó kibocsátás a $\mathrm{d}^T = (1, 3, 2)$ vektorral adható meg. Határozzuk meg a bruttó kibocsátást:

$$\mathrm{x} = (E_3 - C)^{-1}\mathrm{d} = \begin{pmatrix} 1.62 & 0.67 & 0.57 \\ 0.38 & 1.33 & 0.43 \\ 0.10 & 0.33 & 1.36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.62 + 2.01 + 1.14 \\ 0.38 + 3.99 + 0.86 \\ 0.10 + 0.99 + 2.72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.77 \\ 5.23 \\ 3.81 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés.

- Ha egy gazdaság ráfordítási mátrixának Leontief-inverze tartalmaz negatív elemet, akkor a gazdaság nem működőképes: adott termékmennyiség előállításához összességében végtelen sok terméket fogyasztana el.
- Ha egy gazdaság ráfordítási mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 0.7 & 0.3 \\ 1.1 & 0.1 & 1.2 \\ 1.2 & 1.2 & 0.1 \end{pmatrix},$$

akkor a gazdaság nem működőképes, hiszen ...

Példa.

Legyen egy gazdaság ráfordítási mátrixa

$$C = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg a $d = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ nettó kibocsátáshoz tartozó összkibocsátást.
A C mátrix Leontief-inverze:

$$(E_3 - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 & -0.1 \\ -0.1 & 0.7 & -0.6 \\ -0.2 & -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 10. & 11.25 & 19.375 \\ 10. & 13.75 & 23.125 \\ 10. & 12.5 & 23.75 \end{pmatrix}.$$

Példa (folyt.).

Így a bruttó kibocsátás vektora:

$$(E_3 - C)^{-1}\mathrm{d} = \begin{pmatrix} 10. & 11.25 & 19.375 \\ 10. & 13.75 & 23.125 \\ 10. & 12.5 & 23.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40.625 \\ 46.875 \\ 46.25 \end{pmatrix}.$$

Példa.

Működőképes-e az a gazdaság, amelynek ráfordítási mátrixa:

$$C = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.18 \end{pmatrix}?$$

Meghatározzuk C Leontief-inverzét.

$$(E_3 - C)^{-1} = \begin{pmatrix} -295.71 & -320 & -264.29 \\ -232.86 & -250 & -207.14 \\ -185.71 & -200 & -164.29 \end{pmatrix}$$

A gazdaság nem működőképes.

Példa.

Változtassuk meg egy kicsit a ráfordítási mátrixot és vizsgáljuk, hogy mennyire változik a végeredmény (ez az úgynevezett érzékenység-vizsgálat). Esetünkben a helyzet menthető. Legyen

$$C' = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.17391 \end{pmatrix} \quad \left[C = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.18 \end{pmatrix} \right].$$

Ekkor

$$(E_3 - C')^{-1} = \begin{pmatrix} 597\,519. & 643\,480. & 528\,571. \\ 468\,324. & 504\,350. & 414\,286. \\ 371\,429. & 400\,000. & 328\,571. \end{pmatrix}.$$

A gazdaság így működőképes, de nem túl hatékonyan működik, hiszen 1-1 megrendelt termék előállításához gondoljuk meg, hogy mennyi köztes termék kell...

Megjegyzés (néhány kérdés a ráfordítási mátrixszal kapcsolatban).

- Működőképes-e a gazdaság?
- Adott termékmennyiség előállítása során mennyi terméket kell legyártani?
- Ha az árak ismertek, hogy lehet meghatározni az egyes ágazatok profitját?
- Milyen árak mellett lehet az összprofitot maximalizálni?
- Milyen egyensúlyi helyzetei vannak a gazdaságnak?

Költség és profit

Példa (♠).

Legyen egy gazdaság ráfordítási mátrixa:

$$C = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix},$$

és legyen az ágazatok termékeinek árvektora

$$\mathrm{v} = (1\ 2\ 3)$$

(azaz, az első termék 1, a második 2, a harmadik pedig 3 egységbe kerül). Határozzuk meg az egyes ágazatok egységnyi termékének előállításakor keletkező költséget.

Példa (folyt. (♠)).

$$C = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{v} = (1\ 2\ 3).$$

Világos, hogy az első, második, illetve harmadik ágazat egységnyi termékének előllításakor rendre

$$\begin{aligned} 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 &= 1.6, \\ 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.4 &= 1.7, \\ 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.2 &= 1.6 \end{aligned}$$

egységnyi kiadás keletkezik.

Tétel.

Ha C egy gazdaság ráfordítási mátrixa és v az árvektor, akkor az egyes ágazatok **költségeit** a $\mathrm{v}C$ vektor tartalmazza. A **profit(vektor)** pedig $\mathrm{v} - \mathrm{v}C = \mathrm{v}(E - C)$.

Példa (folyt. (♠)).

Az előbbi példában a profitvektor:

$$\mathrm{v}(E_3 - C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 & -0.2 \\ -0.3 & 0.9 & -0.4 \\ -0.2 & -0.4 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.3 & 1.4 \end{pmatrix},$$

ami azt mutatja, hogy a második és harmadik ágazat nyereséges, az első ágazat pedig veszteséges.

Definíció: produktív gazdaság.

A $\mathcal{G}$ gazdaság **produktív**, ha minden ágazatban keletkezik hozzáadott érték, minden ágazat realizál profitot.

Tétel (Produktivitás).

Legyen $\mathcal{G}$ olyan gazdaság, melynek n ágazata van ($n \in \mathbb{N}$), valamint legyen $C \in (\mathbb{R}_0^+)^{n \times n}$ a ráfordítási mátrixa e gazdaságnak. Ekkor ha a $\mathcal{G}$ gazdaság működőképes, akkor meg lehet úgy határozni a v árvektort, hogy $\mathrm{v}(E_n - C)$ minden komponense pozitív legyen, azaz minden ágazat nyereséges, tehát a gazdaság produktív.

Példa.

Ha a (♠) Példánkban az árvektort $v' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2.9 \end{pmatrix}$, akkor már minden ágazat nyereséges lesz:

$$v'(E_3 - C) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 & -0.2 \\ -0.3 & 0.9 & -0.4 \\ -0.2 & -0.4 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.04 & 1.12 \end{pmatrix}.$$

Míg a v árvektorral a gazdaság nem volt produktív, a v' árvektorral produktív lett.
A C mátrix Leontief-inverze:

$$(E_3 - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 3.1 & 1.8 & 1.7 \\ 1.8 & 2.4 & 1.7 \\ 1.7 & 1.7 & 2.5 \end{pmatrix}.$$

Vektorterek

Definíció: Valós szám-n-esek halmaza.

Legyen n természetes szám. Az $\mathbb{R}^n$ halmaz elemeit **valós szám-n-eseknek** nevezzük:

$$a = (a_1, \ldots, a_n)^T,$$

ahol $a_1, \ldots, a_n$ valós számok. Tetszőleges i indexre $(1 \leqslant i \leqslant n)$ a_i az a valós szám-n-es i-edik **komponense**.

Példa.

- $\mathbb{R}^2$ a valós számpárok halmaza, pl.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1, 2)^T$, $(3, \sqrt{2})^T$,
- $\mathbb{R}^3$ a valós számhármasok halmaza, pl.: $\begin{pmatrix} \pi \\ \sqrt{3} \\ \sin \frac{\pi}{16} \end{pmatrix} = (\pi, \sqrt{3}, \sin \frac{\pi}{16})^T$.

Definíció: Valós szám-n-esek egyenlősége.

Az $(a_1, \ldots, a_n)^T$ és $(b_1, \ldots, b_n)^T$ valós szám-n-esek pontosan akkor egyenlők, ha a megfelelő komponenseik egyenlők, azaz

$$(a_1, \ldots, a_n)^T = (b_1, \ldots, b_n)^T \overset{\text{def.}}{\iff} a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n.$$

Példa.

$$\begin{aligned}
(-1, 2)^T &\neq (-1, 2, 3)^T, \\
(-1, 2, 3.14)^T &\neq (-1, 2, \pi)^T, \\
(6, 28, 496, 8128)^T &= (2(2^2 - 1), 2^2(2^3 - 1), 2^4(2^5 - 1), 2^6(2^7 - 1))^T.
\end{aligned}$$

Definíció: vektorok összeadása és skalárral való szorzás.

Az $\mathbb{R}^n$ halmaz elemein definiáljuk az összeadást, és a skalárokkal (= valós számokkal) történő szorzást a következő módon. Ha $(a_1, \ldots, a_n)^T, (b_1, \ldots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned}(a_1, \ldots, a_n)^T + (b_1, \ldots, b_n)^T &\stackrel{\text{def.}}{=} (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)^T \\ \alpha \cdot (a_1, \ldots, a_n)^T &\stackrel{\text{def.}}{=} (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)^T.\end{aligned}$$

Példa.

$$\begin{aligned}(1, \sqrt{2} - 1, 3, 0.4)^T + (2, 1, 0, -1.2)^T &= (3, \sqrt{2}, 3, -0.8)^T, \\ 0 \cdot (1, -1, \sqrt{2}, \pi)^T &= (0, 0, 0, 0)^T.\end{aligned}$$

Definíció: Valós vektortér.

Az így kapott $(\mathbb{R}^n; +, \alpha \cdot (\alpha \in \mathbb{R}))$ struktúrát nevezzük a **(valós) szám-n-esek vektorterének**.

Jelölés.

- **Vektortér**: V, U, ...; elemei a vektorok (u, v, w, ...).
- **Skalárok**: $\mathbb{R}$ elemei (α, β, γ, ...).

Definíció: Zérusvektor.

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér csupa 0-ból álló vektorát zérusvektornak nevezzük, és $\underline{0}$-val jelöljük, $\underline{0} = (0, \ldots, 0)^T$.

Tétel (a valós szám-n-esek vektorterének elemi tulajdonságai).

Legyen $V = \mathbb{R}^n$. Ekkor tetszőleges $u, v, w \in V$ vektorra és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalárra érvényesek a következők:

1. $u + v = v + u$ (a vektorok összeadása kommutatív),
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ (a vektorok összeadása asszociatív),
3. $\underline{0} + u = u + \underline{0} = u$,
4. $(-1) \cdot u + u = u + (-1) \cdot u = \underline{0}$,
5. $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$,
6. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,
7. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$,
8. $1 \cdot u = u$.

Tétel.

Tetszőleges $v \in V$ vektorra és $\alpha \in \mathbb{R}$ skalárra $\alpha \cdot v = \underline{0}$ pontosan akkor teljesül, ha $\alpha = 0$ vagy $v = \underline{0}$.

Igaz vagy Hamis?

- Ha egy gazdaságban a szektorok együttes termelése nyereséges, akkor minden szektor termelése nyereséges.

Hamis, az együttes termelés lehet nyereséges, attól függetlenül, hogy van veszteséges ágazat, csak a nyereséges ágazatoknak több profitot kell termelni, mint a veszteségeseknek.