5. Előadás

Probléma.

Legyen A $(m \times n)$-es és B $(m \times \ell)$-es valós mátrix. Található-e olyan X valós mátrix, amelyre $AX = B$?

Megjegyzés.

(a) Ha létezik a fenti tulajdonságú X mátrix, akkor $X \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$.

Megjegyzés (folyt.).

(b) Az

$$A \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{matrix}} & \dots & \boxed{\begin{matrix} x_{1\ell} \\ \vdots \\ x_{n\ell} \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{matrix}} & \dots & \boxed{\begin{matrix} b_{1\ell} \\ \vdots \\ b_{m\ell} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

mátrixegyenlet ekvivalens az alábbi lineáris egyenletrendszer (LER) rendszerrel, ami ℓ darab LER-ből áll, amelyek mindegyike m egyenletet és n ismeretlent tartalmaz:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}, \dots, A \cdot \begin{pmatrix} x_{1\ell} \\ \vdots \\ x_{n\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1\ell} \\ \vdots \\ b_{m\ell} \end{pmatrix}.$$

Az egyes egyenletrendszerek elemi bázistranszformációval megoldhatók, ügyesen szervezve a teendőket, akár egyszerre is.

Az elemi bázistranszformációt az alábbi táblázatra fogjuk végrehajtani:

$$
\begin{array}{c|ccc|ccc}
0. & \mathrm{x}_1 & \dots & \mathrm{x}_n & \mathrm{b}_1 & \dots & \mathrm{b}_\ell \\
\hline
e_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1\ell} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
e_m & a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_{m1} & \dots & b_{m\ell}
\end{array}
$$

Szabályok:

- az „e”-ket szeretnénk lecserélni „x”-ekre, így
- a generáló elem csak az a_{ij}-k közül kerülhet ki.

Példa.

Oldjuk meg az

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixegyenletet.

Megoldás. Ha X megoldása a mátrixegyenletnek, akkor $X \in \mathbb{R}^{4\times 3}$. Az EBT-hez szükséges táblázat az alábbi lesz:

0.	x_1	x_2	x_3	x_4	b_1	b_2	b_3
e_1	1	-1	2	1	-1	1	0
e_2	1	0	1	-1	1	2	1

Példa (folyt.).

0.	x_1	x_2	x_3	x_4	b_1	b_2	b_3
e_1	1^*	-1	2	1	-1	1	0
e_2	1	0	1	-1	1	2	1

1.	x_2	x_3	x_4	b_1	b_2	b_3
x_1	-1	2	1	-1	1	0
e_2	1^*	-1	-2	2	1	1

2.	x_3	x_4	b_1	b_2	b_3
x_1	1	-1	1	2	1
x_2	-1	-2	2	1	1

Példa (folyt.).

A cserét teljesen végrehajtottuk, a mátrixegyenlet megoldható.

2.	x_3	x_4	b_1	b_2	b_3
x_1	1	-1	1	2	1
x_2	-1	-2	2	1	1

Az utolsó táblázatból a megoldásokat is leolvashatjuk. Legyen $X = (x_{ij})_{4\times 3}$. Ekkor x_{1j} és x_{2j} „kötött változók" lesznek, az x_{3j} és x_{4j} $(1 \le j \le 3)$ változók pedig „szabadok":

$$\begin{aligned}
x_{11} &= 1 - x_{31} + x_{41}, & x_{21} &= 2 + x_{31} + 2x_{41},\\
x_{12} &= 2 - x_{32} + x_{42}, & x_{22} &= 1 + x_{32} + 2x_{42},\\
x_{13} &= 1 - x_{33} + x_{43}, & x_{23} &= 1 + x_{33} + 2x_{43}.
\end{aligned}$$

Példa (folyt.).

2.	x_3	x_4	b_1	b_2	b_3
x_1	1	-1	1	2	1
x_2	-1	-2	2	1	1

A mátrixegyenlet általános megoldása:

$$X = \begin{pmatrix} 1-x_{31}+x_{41} & 2-x_{32}+x_{42} & 1-x_{33}+x_{43} \\ 2+x_{31}+2x_{41} & 1+x_{32}+2x_{42} & 1+x_{33}+2x_{43} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix},$$

ahol $x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{41}, x_{42}, x_{43}$ tetszőleges valós számok.

Figyeljünk az előjelváltásra és a változók sorrendjére!!!

Tegyük fel, hogy az $AX = B$ mátrixegyenlet megoldható ($A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times \ell}$).

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
0. & \mathrm{x}_1 & \dots & \mathrm{x}_n & \mathrm{b}_1 & \dots & \mathrm{b}_\ell \\
\hline
e_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1\ell} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
e_m & a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_{m1} & \dots & b_{m\ell}
\end{array}$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
w. & \mathrm{x}_{j_{s+1}} & \dots & \mathrm{x}_{j_n} & \mathrm{b}_1 & \dots & \mathrm{b}_\ell \\
\hline
\mathrm{x}_{i_1} & a'_{i_1 j_{s+1}} & \dots & a'_{i_1 j_n} & b'_{i_1 1} & \dots & b'_{i_1 \ell} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathrm{x}_{i_s} & a'_{i_s j_{s+1}} & \dots & a'_{i_s j_n} & b'_{i_s 1} & \dots & b'_{i_s \ell} \\
e_{i_{s+1}} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
e_{i_m} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}$$

Megjegyzés.

- Az x_i változó az X megoldásmátrix x_{ij} változóit „jelképezi".
- A változók értékét úgy határozhatjuk meg, mint az egyenletrendszer megoldása esetén. Tehát a példában az x_3 és x_4 „szabad változók" lesznek, így X minden oszlopának harmadik és negyedik eleme szabadon választható.
- A konstansok meghatározásakor a megfelelő oszlop kontansait a jobboldali konstansok megfelelő oszlopa határozza meg, például a második oszlophoz csak a jobboldali konstansok második oszlopát kell figyelembe venni.

Megjegyzés (folyt.).

A mátrixegyenletnek pontosan akkor nincs megoldása, ha az elemi bázistranszformáció során van ellentmondó sor, ami a következő alakú lehet:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} w. & x_{j_1} & \ldots & x_{j_k} & b_1 & \ldots & b_\ell \\ \hline . & . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ e_i & 0 & \ldots & 0 & c_1 & \ldots & c_\ell \\ . & . & \ldots & . & . & \ldots & . \end{array},$$

ahol a c-k közül legalább egy nem nulla, VAGY

$$\begin{array}{c||ccc} w. & b_1 & \ldots & b_\ell \\ \hline . & . & \ldots & . \\ e_i & c_1 & \ldots & c_\ell \\ . & . & \ldots & . \end{array},$$

ahol a „c”-k közül legalább egy nem nulla. Azaz a változók oszlopai már „elfogytak”, de maradt e_i sorában nem nulla elem.

Megjegyzés (folyt.).

Ha a mátrixegyenlet megoldása során a következő táblázatot kapjuk:

$$\begin{array}{c||ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline x_1 & 1 & 2 & 2 \\ x_3 & 2 & -1 & 3 \\ x_2 & 1 & -1 & -1 \end{array},$$

akkor nincs szabad ismeretlen (és nincs ellentmondó sor), így pontosan egy megoldás van. A megoldás leolvasásakor ügyeljünk, hogy a sorokat megfelelő sorrendben írjuk, azaz ebben az esetben:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Példa.

Előállhat-e a következő táblázat egy mátrixegyenlet megoldása során?

$w.$	b_1	b_2	b_3
x_1	2	2	-1
x_2	2	0	3
e_3	0	0	0

Igen, ha az A mátrix (3×2), a B pedig (3×3) méretű, akkor az $AX = B$ mátrixegyenletnél az X mátrix, ha létezik, (2×3) típusú.

Hány megoldás van? Az e_3 sorában minden elem nulla, így nincs ellentmondó sor. Mivel nincs szabad ismeretlen, pontosan egy megoldás van:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Az $XA = B$ alakú mátrixegyenletek megoldásáról.

$$XA = B \quad \overset{\sqcup^T}{\Longleftrightarrow} \quad A^T X^T = B^T$$

Azaz,

1. először oldjuk meg az $A^T Y = B^T$ mátrixegyenletet,
2. ha Y megoldása, akkor az eredeti egyenlet megoldása $X = Y^T$ lesz.

Példa.

Oldjuk meg az

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 & 2 \\ 7 & 7 & 6 & 0 \\ 8 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

mátrixegyenletet ($X \in \mathbb{R}^{3\times 4}$).

Megoldás. „Transzponáljuk az egyenletet”:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 7 & 7 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Példa (folyt.).

0.	y_1	y_2	y_3	y_4	b_1	b_2	b_3
e_1	1^*	1	2	4	9	7	8
e_2	0	2	1	3	7	7	4
e_3	1	1	1	3	6	6	6
e_4	1	-1	1	1	2	0	4

1.	y_2	y_3	y_4	b_1	b_2	b_3
y_1	1	2	4	9	7	8
e_2	2	1^*	3	7	7	4
e_3	0	-1	-1	-3	-1	-2
e_4	-2	-1	-3	-7	-7	-4

Példa (folyt.).

2.	y_2	y_4	b_1	b_2	b_3
y_1	-3	-2	-5	-7	0
y_3	2	3	7	7	4
e_3	2^*	2	4	6	2
e_4	0	0	0	0	0

3.	y_4	b_1	b_2	b_3
y_1	1	1	2	3
y_3	1	3	1	2
y_2	1	2	3	1
e_4	0	0	0	0

Megjegyzés.

- Nem sikerült minden „e”-t ”y”-ra cserélni, de a megmaradt „e”-k sorában minden elem 0, tehát nincs ellentmondó sor. Ekkor a megoldás a korábbi módon olvasható le.

Példa (folyt.).

2.	y_2	y_4	b_1	b_2	b_3
y_1	-3	-2	-5	-7	0
y_3	2	3	7	7	4
e_3	2^*	2	4	6	2
e_4	0	0	0	0	0

3.	y_4	b_1	b_2	b_3
y_1	1	1	2	3
y_3	1	3	1	2
y_2	1	2	3	1
e_4	0	0	0	0

A transzponált mátrixegyenlet megoldás a következő:

$$\begin{aligned}
y_{11} &= 1 - y_{41}, & y_{21} &= 2 - y_{41}, & y_{31} &= 3 - y_{41},\\
y_{12} &= 2 - y_{42}, & y_{22} &= 3 - y_{42}, & y_{32} &= 1 - y_{42},\\
y_{13} &= 3 - y_{43}, & y_{23} &= 1 - y_{43}, & y_{33} &= 2 - y_{43},
\end{aligned}$$

ahol ...

Példa (folyt.).

..., ahol y_{4j} $(j = 1, 2, 3)$ teszőlegesen választható, azaz

$$Y = \begin{pmatrix} 1 - y_{41} & 2 - y_{42} & 3 - y_{43} \\ 2 - y_{41} & 3 - y_{42} & 1 - y_{43} \\ 3 - y_{41} & 1 - y_{42} & 2 - y_{43} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} \end{pmatrix}.$$

Példa (folyt.).

Az

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 & 2 \\ 7 & 7 & 6 & 0 \\ 8 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

mátrixegyenletet megoldása pedig

$$X = Y^T = \begin{pmatrix} 1 - y_{41} & 2 - y_{41} & 3 - y_{41} & y_{41} \\ 2 - y_{42} & 3 - y_{42} & 1 - y_{42} & y_{42} \\ 3 - y_{43} & 1 - y_{43} & 2 - y_{43} & y_{43} \end{pmatrix},$$

ahol y_{4j} $(j = 1, 2, 3)$ teszőleges valós számok.

Definíció: mátrix inverze.

Legyen A négyzetes mátrix, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Azt mondjuk, hogy a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix **inverze** A-nak, ha

$$AB = E_n \quad \text{és} \quad BA = E_n.$$

Megjegyzés.

Nem minden négyzetes mátrixnak van inverze. Ha az A mátrixnak inverze a B mátrix, akkor

$$1 = |E_n| = |AB| = |A| \cdot |B|$$

következtében $|A| \neq 0$.

Definíció: nemelfajuló és invertálható mátrixok.

- Ha az A mátrix determinánsa nem nulla, akkor a mátrixot **nemelfajulónak** nevezzük.
- Ha az A mátrixnak létezik inverze, azt mondjuk, hogy az A **invertálható**.

Példa.

- Az $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix nemelfajuló, mivel $|E_2| = 1 \neq 0$.
- Az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix invertálható, mivel $A \cdot A = E_2$.

Tétel.

Az A négyzetes mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha determinánsa nem 0. Azaz az A négyzetes mátrix pontosan akkor invertálható, ha nemelfajuló.

Megjegyzés.

Ha egy mátrixnak létezik inverze, akkor az egyértelmű. Jelölés: A^{-1} az A mátrix inverze (ha az létezik).

Tétel.

Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrixnak létezik inverze, akkor

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

ahol A_{ij} az A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó adjungált aldeterminánsa.

Példa.

Legyen $A = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 17 \\ 19 & 23 & 29 \\ 31 & 37 & 41 \end{pmatrix}$. Ekkor $|A| = -40 \neq 0$ következtében A invertálható:

$$A^{-1} = \frac{1}{-40} \cdot \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 23 & 29 \\ 37 & 41 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 19 & 29 \\ 31 & 41 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 19 & 23 \\ 31 & 37 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 13 & 17 \\ 37 & 41 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 11 & 17 \\ 31 & 41 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 31 & 37 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 13 & 17 \\ 23 & 29 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 11 & 17 \\ 19 & 29 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 19 & 23 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{-40} \cdot \begin{pmatrix} -130 & 96 & -14 \\ 120 & -76 & 4 \\ -10 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{12}{5} & \frac{7}{20} \\ -3 & \frac{19}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{20} \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés.

Hogyan számoljuk egy mátrix inverzét, amennyiben az létezik?

Ha az A $(n \times n)$-es mátrix invertálható, akkor A^{-1} az $AX = E_n$ mátrixegyenlet (egyetlen) megoldása. Azaz a mátrixegyenletre tanult módszer segítségével kiszámítható a mátrix inverze.

- Az A $(n \times n)$-es mátrix pontosan akkor nem invertálható, ha ellentmondó sort kapunk az $AX = E_n$ mátrixegyenlet megoldása során.

Az $AX = E_n$ egy speciális mátrixegyenlet, így a korábbi elemi bázistranszformációs lépések kis módosításával egyszerűbben is meg lehet oldani (ld. a következő néhány diakocka).

Mátrix inverzének számítása EBT-vel:

1. A mátrix elemeit táblázatba foglaljuk, a sorokat az $e_1, e_2, \ldots,$ az oszlopokat pedig a $v_1, v_2, \ldots$ szimbólumokkal címkézzük.
2. Generálóelemet választunk ($a_{ij} \neq 0$), majd elemi bázistranszformációt hajtunk végre:
   - most nem hagyunk el oszlopot (ld. Új szabályok!),
   - az a_{ij} elem sor- és oszlopcímkéi felcserélődnek,
   - mindig „e”-t cserélünk „v”-re.
3. Addig ismételjük a 2. lépést, amig alkalmas generáló elemet tudunk választani.
4. Ha az „e”-k és a „v”-k helyet cseréltek, akkor a mátrixnak van inverze, a sorokat és az oszlopokat a címkék eredeti sorrendjének megfelelően átrendezve az inverz is látható.
5. Ha még azelőtt elakadunk, hogy az „e”-k és a „v”-k helyet cseréltek volna, akkor a mátrixnak nincs inverze.

Új szabályok!

A generáló elem oszlopát nem hagyjuk el, az új táblázatba a következő elem kerülnek ebbe az oszlopba:

- a generáló elem helyébe annak reciproka kerül: $a'_{ij} = 1/a_{ij}$,
- a generáló elem oszlopának többi elemét osztjuk a generáló elem (-1)-szeresével: $a'_{i'j} = a_{i'k}/(-a_{ij})$ $(i' \neq i)$.

Példa.

Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot.

0.	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	1^*	2	0	1
e_2	2	1	2	-1
e_3	0	2	1	2
e_4	-1	0	2	1

$\rightsquigarrow$

1.	e_1	v_2	v_3	v_4
v_1	1	2	0	1
e_2	-2	-3	2	-3
e_3	0	2	1^*	2
e_4	1	2	2	2

2.	e_1	v_2	e_3	v_4
v_1	1	2	0	1
e_2	-2	-7	-2	-7
v_3	0	2	1	2
e_4	1	-2	-2	-2^*

$\rightsquigarrow$

3.	e_1	v_2	e_3	e_4
v_1	$3/2$	1	-1	$1/2$
e_2	$-11/2$	0	5	$-7/2$
v_3	1	0	-1	1
v_4	$-1/2$	1	1	$-1/2$

Elakadtunk, így az A mátrixnak nincs inverze.

Példa.

Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixot. Invertálható-e az A mátrix?

0.	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	2	1^*	0	0
e_2	1	2	1	0
e_3	0	1	2	1
e_4	0	0	1	2

$\rightsquigarrow$

1.	v_1	e_1	v_3	v_4
v_2	2	1	0	0
e_2	-3	-2	1^*	0
e_3	-2	-1	2	1
e_4	0	0	1	2

2.	v_1	e_1	e_2	v_4
v_2	2	1	0	0
v_3	-3	-2	1	0
e_3	4	3	-2	1^*
e_4	3	2	-1	2

$\rightsquigarrow$

3.	v_1	e_1	e_2	e_3
v_2	2	1	0	0
v_3	-3	-2	1	0
v_4	4	3	-2	1
e_4	-5^*	-4	3	-2

Példa (folyt.).

3.	v_1	e_1	e_2	e_3
v_2	2	1	0	0
v_3	-3	-2	1	0
v_4	4	3	-2	1
e_4	-5^*	-4	3	-2

$\rightsquigarrow$

4.	e_4	e_1	e_2	e_3
v_2	$2/5$	$-3/5$	$6/5$	$-4/5$
v_3	$-3/5$	$2/5$	$-4/5$	$6/5$
v_4	$4/5$	$-1/5$	$2/5$	$-3/5$
v_1	$-1/5$	$4/5$	$-3/5$	$2/5$

Minden „e"-t ki tudtunk cserélni „v"-re, ezért A-nak van inverze, a címkék sorrendjét visszaállítva azt kapjuk, hogy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tétel (Az invertálás azonosságai).

Legyen A és B tetszőleges $(n \times n)$-es invertálható mátrix, ekkor

1. $(A^{-1})^{-1} = A$,
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Definíció: négyzetes mátrix negatív kitevős hatványa.

Ha A invertálható mátrix, akkor az inverz létezését felhasználva definiálhatók A negatív kitevős hatványai:

$$A^{-k} = \left(A^{-1}\right)^{k} = \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdots A^{-1}}_{k \text{ db}} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Definíció: mátrix nulladik hatványa.

Tetszőleges A $(n \times n)$-es mátrix esetén $A^0 = E_n$.

Tétel (A hatványozás azonosságai).

Legyen A tetszőleges invertálható mátrix, és $m, k \in \mathbb{Z}$, ekkor

1. $A^{m+k} = A^m A^k$,
2. $(A^m)^k = A^{mk}$.

1. módszer (El clasico: merészeknek)

Tétel.

Ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrixnak létezik inverze, akkor

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

ahol A_{ij} az A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó adjungáltja.

Megjegyzés.

Ha az $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixnak létezik inverze, akkor ezzel a módszerrel gyorsan kiszámolható.

(2×2)-es mátrix inverze adjungált aldeterminánsok segítségével

Ha az $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixnak létezik az inverze, akkor

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^{T} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2. módszer (El ecuación matricial: bátraknak)

Tétel.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrix és

$$(A|E_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

- Ha $(A|E_n) \sim (E_n|B)$, akkor A invertálható és $B = A^{-1}$.
- Ha $(A|E_n) \not\sim (E_n|\bigstar)$, akkor A nem invertálható.

Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -15 \end{pmatrix}$$

$$(A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -15 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{Sorokon végzett elemi átalakítások}}{\sim \cdots \sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 46 & -33 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -33 & 24 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 46 & -33 & 7 \\ -33 & 24 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Példa.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&-16\end{pmatrix}$$

$$(A|E_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&3&1&0&1&0\\3&1&-16&0&0&1\end{array}\right)\underset{\sim\cdots\sim}{\text{Sorokon végzett elemi átalakítások}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&5&2&-1&0\\0&0&0&7&-5&1\end{array}\right)$$

Az A mátrix nem invertálható (vö.: $|A|=0$).

3. módszer (El transformación de base elemental: bátraknak)

Tétel.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrix. Ha az EBT pontosan n lépés után ér véget:

$$\begin{array}{c|ccc|} 0. & \mathrm{v}_1 & \dots & \mathrm{v}_n \\ \hline e_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c|ccc|} n. & e_{j_1} & \dots & e_{j_n} \\ \hline \mathrm{v}_{i_1} & a'_{i_1 j_1} & \dots & a'_{i_1 j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{v}_{i_n} & a'_{i_n j_n} & \dots & a'_{i_n j_n} \end{array},$$

akkor az A mátrix invertálható, inverze $(a'_{ij})_{n\times n}$. Különben nem invertálható.

Mátrixinverz használata mátrixegyenlet megoldásánál

Legyen A $(n \times n)$-es **invertálható mátrix**, és B $(n \times k)$-as mátrix. Tekintsük az $AX = B$ mátrixegyenletet. Az egyenlet megoldható, és a megoldás a következőképpen is megkapható. A mátrixegyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg balról A^{-1}-gyel:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Mivel $A^{-1}A = E$, és $EX = X$, így a mátrixegyenletnek pontosan egy megoldása van:

$$X = A^{-1}B.$$

Ha A $(n \times n)$-es **invertálható mátrix**, és B $(k \times n)$-es mátrix, akkor az előzőhöz hasonlóan az $XA = B$ mátrixegyenlet is megoldható, egyetlen megoldása a következő alakú: $X = BA^{-1}$.

Ha az A mátrix nem invertálható, ez a módszer nem alkalmazható!

Igaz vagy Hamis?

- Minden trianguláris mátrixnak létezik inverze.

Hamis, ha a főátlóban van 0, akkor a trianguláris mátrix determinánsa 0, így nincs inverze.

- Ha az $AX = B$ mátrixegyenlet megoldható, akkor az $XA = B$ mátrixegyenlet is megoldható.

Hamis, például, ha A (3×3)-as invertálható mátrix, B pedig (3×2)-es mátrix, akkor megoldható az $AX = B$ mátrixegyenlet ($X = A^{-1}B$), de $XA = B$ nem oldható meg, mert az XA szorzatnak 3 oszlopa lenne, B-nek pedig 2.