

# 4. Előadás

**Definíció:** elemi átalakítások (mátrixokra).

Mátrixok elemi átalakításai a következők:

- két sor felcserélése,
- egy sorhoz másik sor tetszőleges számszorosának hozzáadása,
- sor szorzása 0-tól különböző valós számmal.

Ha a  $B$  mátrix elemi átalakításokkal keletkezik az  $A$  mátrixból, akkor az  $A \sim B$  jelölést használjuk.

## Definíció: mátrixok lépcsős alakja.

Legyen  $A$  tetszőleges valós mátrix. Ha az  $A$  mátrix a zérusmátrix, akkor **lépcsős alakú**. Tegyük fel, hogy a nem a zérusmátrix. Ekkor  $A$  **lépcsős alakú**, ha

- a mátrix azon sorai, amelyek csak 0-kat tartalmaznak, azon sorok alatt helyezkednek el, amelyek tartalmaznak 0-tól különböző elemet,
- ha a mátrix  $i_1$ -edik és  $i_2$ -edik sora tartalmaz 0-tól különböző elemet ( $i_1 < i_2$ ), és  $a_{i_1 j_1}$ , illetve  $a_{i_2 j_2}$  ezen sorok első 0-tól különböző elem, akkor
  - $a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2} = 1$ ,
  - $j_1 < j_2$ , azaz minden sorban az első nem nulla elem „hátrébb” van, mint a megelőző sor első nem nulla eleme,
- (a nem csak 0-kat tartalmazó sorok kezdő 1-ese feletti elemek 0-ák).

## Tétel.

Elemi átalakításokkal (Gauss-féle kiküszöböléssel, azaz Gauss-eliminációval) bármely mátrix lépcsős alakra hozható.

A Gauss-elimináció nagyon hasonló a determinánsok számolásánál alkalmazható „kinullázáshoz”. Azonban Gauss-elimináció során **CSAK a SOROKON** végezhető átalakítások, az **OSZLOPOKON NEM**.



Carl Friedrich Gauss  
(1777–1855)

## LER általános megoldása:

- a LER bővített mátrixát lépcsős alakra hozzuk Gauss-eliminációval,
- pontosan akkor nincs megoldás, ha lépcsős alak tartalmaz ellentmondó sort (ld. előző előadás),
- pontosan egy megoldása van, ha bővített mátrixának lécsős alakjában nincs ellentmondó sor és nincs szabad változója,
- végtelen sok megoldása van, ha bővített mátrixának lécsős alakjában nincs ellentmondó sor és van legalább egy szabad változója,
- ha van megoldás, akkor egy általános megoldás leolvasható a lépcsős alakból.

## Korábbi Curipod kérdés

Hány megoldása van a LER-nek, ha a bővített mátrix lépcsős alakjának utolsó sora:

$$( 0 \ 0 \ 1 \ 0 \mid 2 )$$

- Lehet-e ellentmondó sor a bővített mátrixban? Nem, mert annak ez alatt kellene szerepelnie.
- Lehet-e pontosan egy megoldás? Nem, mert az  $x_4$  változóhoz nem tartozik vezéregyes.
- Végtelen sok megoldása van.

### Tétel (LER általános megoldása).

Ha a LER bővített mátrixának lépcsős alakja nem tartalmaz ellentmondó sort, akkor van megoldása az egyenletrendszernek. Ha a bővített mátrix vezéregyesei rendre a  $j_1 < \dots < j_r$  oszlopokban vannak, akkor az  $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$  ismeretlenek lesznek kötöttek, a többi ismeretlen pedig szabad. Ha a bővített mátrix lépcsős alakja az alábbi alakú:

$$\left( \begin{array}{cccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & \mathbf{1} & a'_{1(j_1+1)} & \dots & 0 & a'_{1(j_r+1)} & \dots & a'_{1m} & b'_1 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} & a'_{r(j_r+1)} & \dots & a'_{rm} & b'_r \\ 0 & \dots & & & & & & & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots & \vdots \end{array} \right),$$

akkor ...

## Tétel (LER általános megoldása).

... Ha a bővített mátrix lépcsős alakja az alábbi alakú:

$$\left( \begin{array}{cccccccc|c} 0 & \dots & 0 & \mathbf{1} & a'_{1(j_1+1)} & \dots & 0 & a'_{1(j_r+1)} & \dots & a'_{1m} & b'_1 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} & a'_{r(j_r+1)} & \dots & a'_{rm} & b'_r \\ 0 & \dots & & & & & & & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots & \vdots \end{array} \right),$$

akkor

$$x_{j_1} = b'_1 - a'_{1(j_1+1)}x_{j_1+1} - \dots - a'_{1m}x_m,$$

$$\vdots$$

$$x_{j_r} = b'_r - a'_{r(j_r+1)}x_{j_r+1} - \dots - a'_{rm}x_m.$$

Ne felejtsük el, hogy a vezéregyesek felett 0-ák állnak!



## Példa.

Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert, ahol  $\lambda$  valós paraméter.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer bővített mátrixa és annak „majdnem lépcsős alakja”:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 5 \end{array} \right).$$

## Példa (folyt.).

Az egyenletrendszer bővített mátrixa és annak „majdnem lépcsős alakja”:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 5 \end{array} \right).$$

- Ha  $\lambda \neq 5$ , akkor nincs megoldása az egyenletrendszernek, mivel van ellentmondó sor. Az egyenletrendszer bővített mátrixa és annak lépcsős alakja:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

## Példa (folyt.).

- Ha  $\lambda = 5$ , akkor van megoldás. Az egyenletrendszer bővített mátrixa és annak lépcsős alakja:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & -4 & 11 & 5 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \color{red}{1} & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Két kötött  $(x_1, x_2)$  és két szabad  $(x_3, x_4)$  ismeretlen van. Az általános megoldás:

$$x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4, \quad x_2 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4 \quad (x_3, x_4 \in \mathbb{R}),$$

valós számnégyesek halmazaként pedig:

$$\left( \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4, \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4, x_3, x_4 \right)^T,$$

ahol  $x_3$  és  $x_4$  tetszőleges valós számok.

## Példa (folyt.).

Az egyenletrendszer:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = 5. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer egy általános megoldása:

$$\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4, \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4, x_3, x_4\right)^T \quad (x_3, x_4 \in \mathbb{R}).$$

Az egyenletrendszer egy konkrét megoldását úgy kapjuk meg, hogy a szabad változóknak (konkrét) értéket adunk. Legyen  $x_3 = 9$  és  $x_4 = 25$ , ekkor  $x_1 = -31$  és  $x_2 = -29$ , a konkrét megoldás ekkor:

$$(-31, -29, 9, 25)^T.$$

# Elemi bázistranszformáció

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x_1 & x_2 & & - & x_4 & - & x_5 & = & 0, \\ & & & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ & & & 3x_3 & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & -2. \end{cases}$$

## Elemi bázistranszformáció

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x_1 & x_2 & & -x_4 & -x_5 & = & 0, \\ & & & -5x_4 & -6x_5 & = & 0, \\ & & 3x_3 & -5x_4 & -6x_5 & = & 0, \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & & & = & -2. \end{cases}$$

Fejezzük ki az első egyenletből  $x_2$ -t:  $x_2 = x_4 + x_5$ , majd helyettesítsük be a többi egyenletbe. Amit kapunk

$$\begin{cases} 2x_1 & & & -5x_4 & -6x_5 & = & 0, \\ & 3x_3 & & -5x_4 & -6x_5 & = & 0, \\ x_1 & & -x_3 & -x_4 & -x_5 & = & -2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 & & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ & 3x_3 & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ x_1 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 & & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ & 3x_3 & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0, \\ x_1 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -2. \end{cases}$$

Fejezzük ki a harmadik egyenletből  $x_1$ -et:  $x_1 = -2 + x_3 + x_4 + x_5$ , majd helyettesítsük be a többi egyenletbe. Amit kapunk

$$\begin{cases} 2x_3 & - & 3x_4 & - & 4x_5 & = & 4, \\ 3x_3 & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0. \end{cases}$$

Fejezzük ki az első egyenletből  $x_3$ -at:  $x_3 = 2 + \frac{3}{2}x_4 + 2x_5$ , majd helyettesítsük be a többi egyenletbe. Amit kapunk

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_4 & = & -6. \end{cases}$$



Az egyenletrendszer megoldását megkaptuk:

$$x_4 = 12,$$

$$x_3 = 2 + \frac{3}{2}x_4 + 2x_5 = 20 + 2x_5,$$

$$x_1 = -2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30 + 3x_5,$$

$$x_2 = x_4 + x_5 = 12 + x_5,$$

ahol  $x_5$  tetszőleges valós szám.

A végrehajtott eljárás több előnnyel is bír:

- meglehetősen természetes módja az egyenletrendszer megoldásának,
- tömör és jól áttekinthető formában is végrehajtható.

Az eljárás neve: **Elemi Bázistranszformáció**, amelynek során az új egyenletrendszer együtthatóit fogjuk ügyesen számolni.

Foglaljuk táblázatba az

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

egyenletrendszer együtthatóit:

0.	$x_1$	$\dots$	$x_m$	$b$
$e_1$	$a_{11}$	$\dots$	$a_{1m}$	$b_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$e_n$	$a_{n1}$	$\dots$	$a_{nm}$	$b_n$

0.	$x_1$	$\dots$	$x_m$	$b$
$e_1$	$a_{11}$	$\dots$	$a_{1m}$	$b_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$e_n$	$a_{n1}$	$\dots$	$a_{nm}$	$b_n$

Az alábbi lépéseket hajtsuk végre:

- a **generáló elem** választása: az együtthatók közül választunk egy 0-tól különbözőt (pl.:  $a_{ij}$ -t, ami annak felel meg, hogy az  $i$ -edik egyenletből fejezzük ki  $x_j$ -t), a generáló elemet  $*$ -gal megjelöljük ( $a_{ij}^*$ ),
- az  $x_j$ -hez tartozó oszlopot töröljük és a következő átalakításokat hajtjuk végre:
  - $e_i$  helyébe  $x_j$  kerül (a generálóelemet  $e$  jelű sorból kellett választani),
  - az  $i$ -edik sor minden elemét osztjuk  $a_{ij}$ -vel,
  - az új táblázat többi elemét pedig a **Téglalap-szabállyal** számítjuk ki (a konstansok  $b$  oszlopában is).

## A „Téglalap-szabály”

A téglalap-szabály segítségével azon elemek számíthatók, amelyek nincsenek egy sorban, illetve oszlopban a generáló elemmel. Egy ilyen elem ( $d$ ) a generáló elemmel együtt ( $a$ ) egy téglalap két szemközti csúcsát adja:

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$
$e_1$	$b$	.	$d$	.
$e_2$	.	.	.	.
$e_3$	$a^*$	.	$c$	.

Ebben az esetben az új táblázatban a  $d$  helyére  $d - \frac{bc}{a}$  kerül, vagy más formában:  $\frac{ad-bc}{a}$ .

Elemi bázistranszformáció:  $a_{ij}^* \neq 0$

$k.$	...	$x_v$	...	$x_j$	...	$b$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$e_u$	...	$a_{uv}$	...	$a_{uj}$	...	$b_u$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$e_i$	...	$a_{iv}$	...	$a_{ij}^*$	...	$b_i$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$

$$a'_{iv} = a_{iv} / a_{ij}^*,$$

$$b'_i = b_i / a_{ij}^*,$$

$$a'_{uv} = a_{uv} - \frac{a_{uj} a_{iv}}{a_{ij}^*} = \frac{a_{uv} a_{ij}^* - a_{uj} a_{iv}}{a_{ij}^*},$$

ha  $u \neq i$ ,

$$b'_u = b_u - \frac{a_{uj} b_i}{a_{ij}^*} = \frac{b_u a_{ij}^* - a_{uj} b_i}{a_{ij}^*},$$

ha  $u \neq i$ .

Az új táblázat:

$(k+1).$	...	$x_v$	...	$x_{j-1}$	$x_{j+1}$	...	$b$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$e_u$	...	$a'_{uv}$	...	$a'_{u(j-1)}$	$a'_{u(j+1)}$	...	$b'_u$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$x_j$	...	$a'_{iv}$	...	$a'_{i(j-1)}$	$a'_{i(j+1)}$	...	$b'_i$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

$$a'_{iv} = a_{iv} / a_{ij}^*,$$

$$b'_i = b_i / a_{ij}^*$$

$$a'_{uv} = a_{uv} - \frac{a_{uj} a_{iv}}{a_{ij}^*} = \frac{a_{uv} a_{ij}^* - a_{uj} a_{iv}}{a_{ij}^*},$$

ha  $u \neq i$ ,

$$b'_u = b_u - \frac{a_{uj} b_i}{a_{ij}^*} = \frac{b_u a_{ij}^* - a_{uj} b_i}{a_{ij}^*},$$

ha  $u \neq i$ .

## Példa.

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \\ 3x_3 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

0.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
$e_1$	0	1	0	-1	-1	0
$e_2$	2	0	0	-5	-6	0
$e_3$	0	0	3	-5	-6	0
$e_4$	1	-1	-1	0	0	-2

## Példa (folyt.).

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x_1 & x_2 & & -x_4 & -x_5 & = & 0, \\ & & & -5x_4 & -6x_5 & = & 0, \\ & & 3x_3 & -5x_4 & -6x_5 & = & 0, \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & & & = & -2. \end{cases}$$

0.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
$e_1$	0	1*	0	-1	-1	0
$e_2$	2	0	0	-5	-6	0
$e_3$	0	0	3	-5	-6	0
$e_4$	1	-1	-1	0	0	-2



## Példa (folyt.).

0.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
$e_1$	0	1*	0	-1	-1	0
$e_2$	2	0	0	-5	-6	0
$e_3$	0	0	3	-5	-6	0
$e_4$	1	-1	-1	0	0	-2

1.	$x_1$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
$x_2$	0	0	-1	-1	0
$e_2$	2	0	-5	-6	0
$e_3$	0	3	-5	-6	0
$e_4$	1	-1	-1	-1	-2

$$\begin{cases} 2x_1 & & & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0 \\ & & 3x_3 & - & 5x_4 & - & 6x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -2 \end{cases}$$

## Példa (folyt.).

1.	$x_1$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
$x_2$	0	0	-1	-1	0
$e_2$	2	0	-5	-6	0
$e_3$	0	3	-5	-6	0
$e_4$	$1^*$	-1	-1	-1	-2

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 \qquad \qquad \qquad - \quad 5x_4 \quad - \quad 6x_5 = 0, \\ \qquad \qquad \qquad 3x_3 \quad - \quad 5x_4 \quad - \quad 6x_5 = 0, \\ x_1 \qquad \qquad - \quad x_3 \quad - \quad x_4 \quad - \quad x_5 = -2. \end{array} \right.$$

## Példa (folyt.).

1.	$x_1$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
$x_2$	0	0	-1	-1	0
$e_2$	2	0	-5	-6	0
$e_3$	0	3	-5	-6	0
$e_4$	$1^*$	-1	-1	-1	-2

2.	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
$x_2$	0	-1	-1	0
$e_2$	2	-3	-4	4
$e_3$	3	-5	-6	0
$x_1$	-1	-1	-1	-2

$$\begin{cases} 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 4, \\ 3x_3 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \end{cases}$$

## Példa (folyt.).

2.	$x_3$	$x_4$	$x_5$	b
$x_2$	0	-1	-1	0
$e_2$	$2^*$	-3	-4	4
$e_3$	3	-5	-6	0
$x_1$	-1	-1	-1	-2

$$\begin{cases} 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 4, \\ 3x_3 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \end{cases}$$

## Példa (folyt.).

2.	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
$x_2$	0	-1	-1	0
$e_2$	2*	-3	-4	4
$e_3$	3	-5	-6	0
$x_1$	-1	-1	-1	-2

3.	$x_4$	$x_5$	$b$
$x_2$	-1	-1	0
$x_3$	-3/2	-2	2
$e_3$	-1/2	0	-6
$x_1$	-5/2	-3	0

$$\left\{ \begin{array}{l} -1/2x_4 = -6, \end{array} \right.$$

## Példa (folyt.).

3.	$x_4$	$x_5$	b
$x_2$	-1	-1	0
$x_3$	$-3/2$	-2	2
$e_3$	$-1/2^*$	0	-6
$x_1$	$-5/2$	-3	0

$$\{ -1/2x_4 = -6,$$

## Példa (folyt.).

3.	$x_4$	$x_5$	b
$x_2$	-1	-1	0
$x_3$	-3/2	-2	2
$e_3$	-1/2*	0	-6
$x_1$	-5/2	-3	0

4.	$x_5$	b
$x_2$	-1	12
$x_3$	-2	20
$x_4$	0	12
$x_1$	-3	30

$$x_1 = 30 + 3x_5, \quad x_2 = 12 + x_5, \quad x_3 = 20 + 2x_5, \quad x_4 = 12,$$

az  $x_5$  ismeretlen értéke tetszőlegesen megválasztható. Figyeljünk az előjelváltásra!

## Tétel (Lineáris egyenletrendszer megoldhatósága).

Lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha az elemi bázistranszformáció során van **ellentmondó sor**, ami a következő alakú:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_{j_1} & \dots & x_{j_k} & b \\
 \hline
 \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\
 e_i & 0 & \dots & 0 & c \neq 0 \\
 \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

## Megjegyzés.

**Fontos:** az ellentmondó sor elején  $e_i$ -nek kell szerepelnie!!!



# Gauss-elimináció vs Elemi bázistranszformáció

## Példa.

Határozzuk meg a

$$\begin{cases} 11x_1 + 13x_2 + 17x_3 + 19x_4 = 17 \\ 23x_1 + 29x_2 + 31x_3 + 37x_4 = 3 \\ 41x_1 + 43x_2 + 47x_3 + 53x_4 = 8 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer általános megoldását.

## Megjegyzés.

A két módszer (GE és EBT) lényegében ugyanaz, de mindkettőnek vannak előnyei és hátrányai is.

## Példa (folyt.).

Határozzuk meg a

$$\begin{cases} 11x_1 + 13x_2 + 17x_3 + 19x_4 = 17 \\ 23x_1 + 29x_2 + 31x_3 + 37x_4 = 3 \\ 41x_1 + 43x_2 + 47x_3 + 53x_4 = 8 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer általános megoldását Gauss-eliminációval.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 11 & 13 & 17 & 19 & 17 \\ 23 & 29 & 31 & 37 & 3 \\ 41 & 43 & 47 & 53 & 8 \end{array} \right)$$

$$(-2) \cdot [1.] + [2.], [1.] \leftrightarrow [2.]$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & -1 & -31 \\ 11 & 13 & 17 & 19 & 17 \\ 41 & 43 & 47 & 53 & 8 \end{array} \right)$$

$$(-11) \times [1.] + [2.], (-41) \times [1.] + [3.]$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & -1 & -31 \\ 0 & -20 & 50 & 30 & 358 \\ 0 & -80 & 170 & 94 & 1279 \end{array} \right)$$

## Példa (folyt.).

$$\begin{array}{l}
 \vdots \\
 (-11) \times [1.] + [2.], \quad (-41) \times [1.] + [3.] \\
 \\
 (-4) \times [2.] + [3.] \\
 \\
 [2.] \cdot (-1/20), \quad [3.] \cdot (-1/30) \\
 \\
 \ddots
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left( \begin{array}{cccc|c}
 1 & 3 & -3 & -1 & -31 \\
 0 & -20 & 50 & 30 & 358 \\
 0 & -80 & 170 & 94 & 1279
 \end{array} \right) \\
 \\
 \left( \begin{array}{cccc|c}
 1 & 3 & -3 & -1 & -31 \\
 0 & -20 & 50 & 30 & 358 \\
 0 & 0 & -30 & -26 & -153
 \end{array} \right) \\
 \\
 \left( \begin{array}{cccc|c}
 1 & 3 & -3 & -1 & -31 \\
 0 & 1 & -5/2 & -3/2 & -179/10 \\
 0 & 0 & 1 & 13/15 & 51/10
 \end{array} \right) \\
 \\
 \left( \begin{array}{cccc|c}
 1 & 0 & 0 & -2/5 & -1/4 \\
 0 & 1 & 0 & 2/3 & -103/20 \\
 0 & 0 & 1 & 13/15 & 51/10
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

## Példa (folyt.).

Határozzuk meg a

$$\begin{cases} 11x_1 + 13x_2 + 17x_3 + 19x_4 = 17, \\ 23x_1 + 29x_2 + 31x_3 + 37x_4 = 3, \\ 41x_1 + 43x_2 + 47x_3 + 53x_4 = 8 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer általános megoldását Elemi bázistranszformációval.

0.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	b
$e_1$	$11^*$	13	17	19	17
$e_2$	23	29	31	37	3
$e_3$	41	43	47	53	8

  

1.	$x_2$	$x_3$	$x_4$	b
$x_1$	$13/11$	$17/11$	$19/11$	$17/11$
$e_2$	$20/11^*$	$-50/11$	$-30/11$	$-358/11$
$e_3$	$-60/11$	$-180/11$	$-196/11$	$-609/11$

2.	$x_3$	$x_4$	b
$x_1$	$9/2$	$7/2$	$227/10$
$x_2$	$-5/2$	$-3/2$	$-179/10$
$e_3$	$-30$	$-26^*$	$-153$

3.	$x_3$	b
$x_1$	$6/13$	$547/260$
$x_2$	$-10/13$	$-2359/260$
$x_4$	$15/13$	$153/26$

## Gauss-elimináció

Előny:

- Nincs vezéregyes!?  
Akkor csinálunk!

Hátrány:

- Sokat kell számolni.

## Elemi Bázistranszformáció

Előny:

- A generáló elem tetszőleges 0-tól különböző elem lehet, nem szükséges az első lépésben az első oszloppal dolgozni.
- Lehetőségünk van a kötött változók „befolyásolására”.

Hátrány:

- Sokat kell számolni.

## Igaz vagy Hamis?

- EBT során a nulla nem lehet generálóelem.

Igaz, a generáló elemmel osztani kell.

- Ha egy lineáris egyenletrendszerben több ismeretlen szerepel, mint ahány egyenletből áll, akkor nincs megoldása.

Hamis, lehet végtelen sok megoldása is.