3. Előadás

Tekintsük a következő egyszerű kereslet-kínálati problémát: valaki túrógombócot szeretne árulni. Piackutatás alapján tudjuk, hogy a túrógombócok iránti kereslet (Q) lineárisan függ a túrógombócok árától (P), mégpedig a

$$Q = 15 - 2P$$

összefüggés szerint. Ugyanakkor minél alacsonyabb az ár, emberünk annál kevesebb túrógombócot hajlandó gyártani (Q), a

$$Q = 5 + 3P$$

összefüggés szerint. Mi lesz a túrógombóc ára? Az ár a kereslet-kínálat törvénye szerint annyi lesz, ami mellett a kereslet és a kínálat egyensúlyba kerül, vagyis amelyre

$$\begin{array}{ccrcr} Q & = & 15 & - & 2P \\ Q & = & 5 & + & 3P \end{array}$$

egyszerre teljesül.

Tegyük fel most, hogy újabb változókat vezetünk be, melyek befolyásolhatják a kereslet-kínálati viszonyokat. Legyenek ezek C, ami a vásárlók jövedelmének, illetve L, ami a termelő munkaerőköltségének felel meg. Újabb piackutatás alapján a fenti új változók bevezetése után a kapott lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} Q &= 5C - 2P \\ Q &= 500 + 3P - 10L \end{aligned}$$

Ez az egyenletrendszer jóval bonyolultabb, mint az előző, ugyanis végtelen sok megoldása van. Az ilyen egyenletrendszerekre úgy érdemes gondolni, hogy azok összefüggéseket hoznak létre a bennük szereplő változók között — a célunk ezen összefüggések meghatározása.

$$\begin{aligned} Q &= 5C - 2P \\ Q &= 500 + 3P - 10L \end{aligned}$$

Az egyenletrendszerre tekinthetünk úgy, hogy az meghatározza a termelt túrógombóc-mennyiséget és árat (Q és P) a vásárlói jövedelmek és munkaerőköltség függvényében (C és L). Ebben az esetben az összefüggés:

$$\begin{aligned} Q &= 4C - 2L + 100 \\ P &= C + 2L - 100 \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a C és L változóknak bármilyen értéket adva, a Q és P értékét a fenti formulákkal meghatározva, az egyenletrendszernek egy megoldását kapjuk.

Van-e olyan módszer, amely egy adott lineáris egyenletrendszer esetén segít meghatározni az összes összefüggést a változók között?

Természetesen van ilyen módszer, de ahhoz először matematikai precizitással definiálni kell, hogy mit értünk egyenletrendszeren, illetve annak megoldásán ...

Definíció: LER.

LER-nek nevezzük az alábbi objektumot:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1m} \cdot x_m & = & b_1, \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1} \cdot x_1 & + & a_{n2} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{nm} \cdot x_m & = & b_n, \end{cases}$$

ahol

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ az ismeretlenek (vagy változók),

az a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ valós számok az együtthatók,

a $b_1, \ldots, b_n$ valós számok a konstansok.

Definíció: LER konkrét megoldása.

Az előbbi LER konkrét megoldásán egy olyan $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ valós szám-m-est értünk, amelyet behelyettesítve az egyenletrendszerbe, minden egyenlőség teljesül:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}s_1 & + & a_{12}s_2 & + & \cdots & + & a_{1m}s_m & = & b_1, \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}s_1 & + & a_{n2}s_2 & + & \cdots & + & a_{nm}s_m & = & b_n. \end{array}\right.$$

Definíció: LER (együttható)mátrixa.

Az

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1m} \cdot x_m = b_1, \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{nm} \cdot x_m = b_n, \end{cases}$$

LER (együttható)mátrixa az alábbi $(n \times m)$-es valós mátrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

amely a LER együtthatóit tartalmazza.

Definíció: LER mátrixos alakja.

Legyen LER-ünk mátrixa $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Jelölje b a konstansokból alkotott $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ mátrixot, valamint x az ismeretlenekből alkotott $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ mátrixot.
Ekkor LER-ünk az alábbi (tömör) formában írható fel:

$$A \cdot \mathrm{x} = \mathrm{b},$$

amelyet a LER mátrixos alakjának nevezünk.

Példa.

Az

$$\begin{cases} -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 7x_3 & = & 8 \end{cases}$$

LER mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix},$$

azaz

$$A \cdot \mathrm{x} = \mathrm{b},$$

ahol $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ (a LER mátrixa), $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ és $\mathrm{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Definíció: LER kiegészített mátrixa.

Az

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1m}\cdot x_m = b_1, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \cdots + a_{nm}\cdot x_m = b_n, \end{cases}$$

LER kiegészített mátrixa (vagy bővített mátrixa) az alábbi $(n \times (m+1))$-es valós mátrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right),$$

amely a LER együtthatóit és a konstansokat tartalmazza.

Definíció: Szabályos LER.

Azt mondjuk, hogy egy lineáris egyenletrendszer szabályos, ha a benne szereplő egyenletek és ismeretlen száma megegyezik, azaz mátrixa négyzetes, továbbá mátrixának determinánsa nem 0.

Tétel (Cramer-szabály).

Ha az

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1m}\cdot x_m & = & b_1, \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}\cdot x_1 & + & a_{n2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{nm}\cdot x_m & = & b_n, \end{array}\right.$$

egyenletrendszer szabályos, akkor pontosan egy megoldása van, amely ...

Tétel (Cramer-szabály (folyt.)).

..., amely a következő:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & a_{1i} & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & a_{2i} & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & a_{ni} & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Megjegyzés.

Tehát a fenti tétel (Cramer-szabály) azt mondja ki, hogy pontosan egy megoldás létezik, azaz az $x_1, \ldots, x_n$ ismeretleneknek csak egyféleképpen lehet úgy értéket adni, hogy az egyenletrendszer egyenletei teljesüljenek.

Sőt, a tétel meg is határozza, hogy mik ezek az értékek:
x_i értékét egy tört adja meg, amelynek nevezője az egyenletrendszer mátrixának determinánsa (amely nem 0, mert az egyenletrendszer szabályos!), a számlálóban pedig az i-edik oszlopot kicseréljük a konstansok oszlopával.

$$\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & a_{1i} & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & a_{2i} & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & a_{ni} & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Példa.

Oldjuk meg a

$$\begin{cases} \quad \quad 2x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 = -1. \end{cases}$$

egyenletredszert Cramer-szabállyal, ha lehetséges.
Az egyenletrendszer mátrixa négyzetes, determinánsa:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 13 \neq 0.$$

Az egyenletrendszer szabályos, így alkalmazható a Cramer-szabály.

Példa (folyt.).

A lineáris egyenletrendszer egyetlen megoldása:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{13} \qquad x_1 = \frac{-10}{13},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{13} \qquad x_2 = \frac{7}{13},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{13} \qquad x_3 = \frac{1}{13}.$$

Megjegyzés.

- A Cramer-szabály **NEM** alkalmazható olyan esetben, ha az egyenletrendszer nem ugyanannyi egyenletet és ismeretlent tartalmaz.
- A Cramer-szabály **NEM** alkalmazható olyan esetben, ha az előző feltétel teljesül, azonban az együtthatómátrix determinánsa 0.

Definíció: LER általános megoldása.

LER általános megoldásán konkrét megoldásainak összességét értjük.

Példa.

Tekintsük a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer egy konkrét megoldása: $(11, -6, 0, 4)$. Az egyenletrendszer (egy) általános megoldása:

$$x_1 = 11 - 3x_3, \quad x_2 = -6 + 4x_3, \quad x_4 = 4 \quad (x_3 \in \mathbb{R}).$$

Az x_1, x_2 és x_4 ismeretlenek a kötött ismeretlenek. Az x_3 ismeretlen pedig szabad ismeretlen. A fent említett konkrét megoldást pedig úgy kapjuk meg, hogy a szabad ismeretlennek az $x_3 = 0$ értéket választjuk.

Az általános megoldás nem mindig egyértelmű.

Példa.

Az

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszernek az alábbiak mindegyike általános megoldása:

$$(1) \quad x_1 = 11 - 3x_3, \quad x_2 = -6 + 4x_3, \quad x_4 = 4, \qquad (x_3 \in \mathbb{R})$$

$$(2) \quad x_1 = \frac{13}{2} - \frac{3}{4}x_2, \quad x_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}x_2, \quad x_4 = 4, \qquad (x_2 \in \mathbb{R})$$

$$(3) \quad x_2 = \frac{26}{3} - \frac{4}{3}x_1, \quad x_3 = \frac{11}{3} - \frac{1}{3}x_1, \quad x_4 = 4, \qquad (x_1 \in \mathbb{R}).$$

A háromféle megoldás abban különbözik, hogy máshogy választottuk meg a (zölddel jelölt) szabad ismeretlent, aminek az értéke tetszőleges valós szám lehet.

Definíció: LER elemi átalakításai.

LER elemi átalakításai a következők:

- két egyenlet felcserélése,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & - & 4x_2 & & & - & 8x_4 & = & -4 \\ x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 5x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 1 \\ & - & 4x_2 & & & - & 8x_4 & = & -4 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 5x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

Definíció: LER elemi átalakításai.

LER elemi átalakításai a következők:

- két egyenlet felcserélése,
- egy egyenlethez másik egyenlet tetszőleges számszorosának hozzáadása,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 1 & \\ & - & 4x_2 & & & - & 8x_4 & = & -4 & \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 5x_4 & = & 5 & \quad | + (-3) \times [1.] \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 1 \\ & - & 4x_2 & & & - & 8x_4 & = & -4 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

Definíció: LER elemi átalakításai.

Lineáris egyenletrendszer elemi átalakításai a következők:

- két egyenlet felcserélése,
- egy egyenlethez másik egyenlet tetszőleges számszorosának hozzáadása,
- egyenlet szorzása 0-tól különböző valós számmal.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 1 \\ & {\color{red}-} & {\color{red}4x_2} & & & {\color{red}-} & {\color{red}8x_4} & {\color{red}=} & {\color{red}-4} \\ & & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \\ \\ \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \mid + [2.] \\ \\ \mid + (-2) \times [2.] \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & - & x_4 & = & 2 \\ & x_2 & & + & 2x_4 & = & 1 \\ & & x_3 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$x_1 = 2 + x_4,$$
$$x_2 = 1 - 2x_4,$$
$$x_3 = 0,$$

ahol x_4 tetszőleges valós szám. Az x_4 változó szabad, x_1, x_2, x_3 pedig kötött változók.

A kísérlet eredménye az, hogy

- az elemi átalakítások nem változtatják meg az egyenletrendszer konkrét megoldásait,
- az elemi átalakítások segítségével megkapható a lineáris egyenletrendszerek általános megoldása,
- sokat írtunk feleslegesen.

Definíció: Mátrixok elemi átalakításai.

Mátrixok elemi átalakításai a következők:

- két sor felcserélése,
- egy sorhoz másik sor tetszőleges számszorosának hozzáadása,
- sor szorzása 0-tól különböző valós számmal.

Jelölés.

Ha a B mátrix elemi átalakításokkal keletkezik az A mátrixból, akkor az $A \sim B$ jelölést használjuk.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & - & 4x_2 & & & - & 8x_4 & = & -4 \\ x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 5x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

$$\updownarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -4 & 0 & -8 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -4 & 0 & -8 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

$$\overset{[1.]\leftrightarrow[2.]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -8 & -4 \\ 3 & -1 & 1 & -5 & \end{array}\right)$$

$$\overset{[3.]+(-3)\times[1.]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{[2.]\cdot(-1/4)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \overset{[3.]+(-2)\times[2.],\ [1.]+[2.]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + x_4, \\ x_2 &= 1 - 2x_4, \\ x_3 &= 0, \end{aligned}$$

ahol $x_4 \in \mathbb{R}$. Az x_4 változó szabad, x_1, x_2, x_3 pedig kötött változók.

Definíció: Lépcsős alakú mátrixok.

Legyen A tetszőleges valós mátrix. Ha az A mátrix a zérusmátrix, akkor lépcsős alakú. Tegyük fel, hogy A nem a zérusmátrix. Ekkor A lépcsős alakú, ha

- a mátrix azon sorai, amelyek csak 0-kat tartalmaznak, azon sorok alatt helyezkednek el, amelyek tartalmaznak 0-tól különböző elemet,
- ha a mátrix i_1-edik és i_2-edik sora tartalmaz 0-tól különböző elemet ($i_1 < i_2$), és $a_{i_1 j_1}$, illetve $a_{i_2 j_2}$ ezen sorok első 0-tól különböző elem, akkor
  - $a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2} = 1$,
  - $j_1 < j_2$, azaz minden sorban az első nem nulla elem „hátrébb" van, mint a megelőző sor első nem nulla eleme,
- (a nem csak 0-kat tartalmazó sorok kezdő 1-ese feletti elemek 0-ák).

$$
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & \blacksquare & 0 & \blacksquare & 0 & \blacksquare & & 0 & \blacksquare \\
0 & \cdots & & & 0 & \boxed{1} & \blacksquare & 0 & \blacksquare & & \vdots & \blacksquare \\
0 & \cdots & & & & & 0 & \boxed{1} & \blacksquare & & 0 & \blacksquare \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & & \vdots & \\
0 & \cdots & & & & & & & & & 0 & \\
0 & \cdots & & & & & & & & 0 & \boxed{1} & \blacksquare \\
0 & \cdots & & & & & & & & & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & & & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

A $\boxed{1}$-sel jelölt elemek a vezéregyesek.

Tétel.
Elemi átalakításokkal (Gauss-féle kiküszöböléssel, azaz Gauss-eliminációval) bármely mátrix lépcsős alakra hozható.

A Gauss-elimináció nagyon hasonló a determinánsok számolásánál alkalmazható „kinullázáshoz”. Azonban Gauss-elimináció során CSAK a SOROKON végezhetők átalakítások, az OSZLOPOKON NEM.

Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

LER megoldhatósága

LER-nek pontosan akkor nincs megoldása, ha bővített mátrixa lépcsős alakjának utolsó nem csupa 0-át tartalmazó sora ellentmondó, azaz a következő alakú:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Tétel (a megoldások számáról).

Az

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_{11} & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ & & & & & \vdots & \\ a_{n1}x_{n1} & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right.$$

egyenletrendszernek

- nincs megoldása, ha bővített mátrixának lécsős alakjában van ellentmondó sor,
- pontosan egy megoldása van, ha bővített mátrixának lécsős alakjában nincs ellentmondó sor és nincs szabad változója,
- végtelen sok megoldása van, ha bővített mátrixának lécsős alakjában nincs ellentmondó sor és van legalább egy szabad változója.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nincs megoldás.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Egy megoldás van.
Nincs szabad változó.
Mo.: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Végtelen sok mo. van.
Van szabad változó (x_2).
$x_1 = -x_2$, $x_3 = 1$ ($x_2 \in \mathbb{R}$)

Igaz vagy Hamis?

- Cramer-szabállyal minden lineáris egyenletrendszer megoldható.

Hamis, csak a szabályos lineáris egyenletrendszerek oldhatók meg Cramer-szabállyal.

- Lineáris egyenletrendszer bármely változója lehet szabad változó.

Hamis, lehetnek olyan változók, amelyek egy konkrét értéket vesznek fel.