2. Előadás

Determinánsok (motiváció)

Példa.

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert, ahol a, b, c, d, e, f valós paraméterek. Határozzuk meg az x_2 ismeretlen értékét.

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = e, \\ cx_1 + dx_2 = f. \end{cases}$$

Ha az első egyenletet megszorozzuk c-vel, a másodikat pedig a-val, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} acx_1 + bcx_2 = ec, \\ acx_1 + adx_2 = af. \end{cases}$$

Példa (folyt.).

A második egyenletből az elsőt kivonva kapjuk:

$$(ad - bc)x_2 = af - ce,$$

azaz, ha $ad - bc \neq 0$, akkor $x_2 = \frac{af-ce}{ad-bc}$ (és $x_1 = \frac{ed-bf}{ad-bc}$).

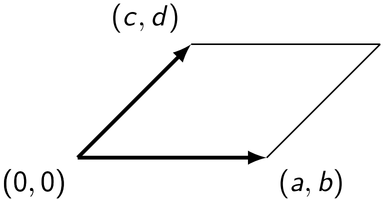
Észrevehető, hogy a fenti megoldás nevezője csak az egyenletrendszer bal oldalán szereplő együtthatóktól függ, vagyis csak az

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mátrixtól.

Példa.

Tekintsük a síkon az (a, b) és (c, d) koordinátájú helyvektorokat. Ez a két vektor egy paralelogrammát feszít ki. Koordinátageometria segítségével belátható, hogy ennek a paralelogrammának a területe éppen $|ad - bc|$.



Megjegyzés.

Ugyanaz az érték szerepel a paralellogramma területének kiszámításakor, mint a kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldásakor. Mivel ez az érték a matematika sok más területén is előfordul, és nagyon fontos szerepet játszik, ezért külön neve is van: **determináns**.

Definíció: (2×2)-es mátrix determinánsa.

Az

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa az $ad - bc$ valós szám.

Definíció: determináns — egzisztencia.

Csak négyzetes mátrixoknak van determinánsa. Az $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrix determinánsa valós szám. Ennek a számnak a jele: $\det(A)$ vagy $|A|$ vagy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Az n természetes számot a $\det(A)$ determináns rendjének nevezzük.

Definíció: 1-rendű determinánsok.

Legyen $A = (a)$ (1×1)-es mátrix. Ekkor A determinánsa:

$$|A| = a.$$

Nagyobb mátrixokra a determináns definíciója rekurzív: egy $(n \times n)$-es mátrix determinánsához n darab $((n-1) \times (n-1))$-es mátrix determinánsát kell kiszámolni.

Definíció: aldetermináns.

Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tetszőleges mátrix. Az $|A|$ determináns i-edik sorának j-edik eleméhez tartozó aldetermináns úgy keletkezik, hogy a determinánsból elhagyjuk annak i-edik sorát és j-edik oszlopát. A kapott determináns jele: M_{ij}.

Példa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \boxed{-2} & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & \dots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \dots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & \dots & a_{i(j-1)} & \boxed{a_{ij}} & a_{i(j+1)} & \dots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\
a_{i1} & \cdots & a_{i(j-1)} & \boxed{a_{ij}} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{in} \\
a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}$$

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Definíció: adjungált aldetermináns.

Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tetszőleges mátrix. Az

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

determináns i-edik sorának j-edik eleméhez tartozó adjungált aldetermináns úgy keletkezik, hogy az M_{ij} aldeterminánst ellátjuk a $(-1)^{i+j}$ előjellel:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Példa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \boxed{-2} & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

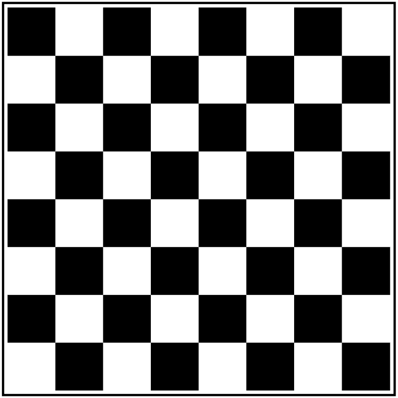
Definíció: determináns első sora szerinti kifejtése.

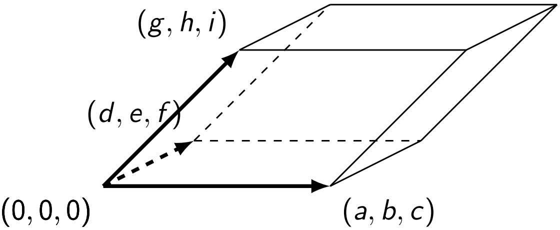
2-Legyen $n \geqslant 2$ természetes szám. Ekkor az

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determináns első sora szerinti kifejtése:

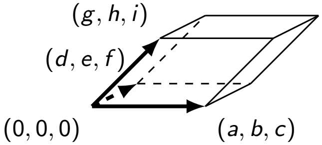
$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot \underbrace{(-1)^{1+j} \cdot M_{1j}}_{A_{1j}} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{1j}.$$





Megjegyzés.

A paralelogramma területét a síkon (2×2)-es mátrix determinánsának abszolútértékeként kaptuk meg. A térben az (a, b, c), (d, e, f), (g, h, i) vektorok és az origó által meghatározott test (paralelepipedon) térfogatát 3-ad rendű determináns abszolútértéke adja meg.



A determinánst úgy kapjuk, hogy soraiban az origóból kiinduló élek végponjainak koordinátái szerepelnek. A determináns rekurzív definícióját felhasználva kifejtjük az első sora szerint:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} +$$

$$+c \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg.$$

A paralelepipedon térfogata:

$$V = |aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg|.$$

Megjegyzés.

A determináns rekurzív definíciója alapján az $(n \times n)$-es determináns $n!$ sok szorzat összegeként számítható ki.
Vegyük észre ugyanakkor, hogy ha a determináns első sorában sok a 0, akkor az összegzés jóval egyszerűbb lesz.

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (-2) \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 = -16.$$

Ezt az észrevételt felhasználva már egy sokkal gyorsabb módszer adódik determinánsok kiszámítására. Ehhez azonban szükség lesz a determinánsok néhány elemi tulajdonságára.

Tétel (Determináns kifejtése).

Determináns bármelyik sora, vagy oszlopa szerint kifejthető. A determináns i-edik sora szerint kifejtése:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}.$$

A determináns j-edik oszlop szerinti kifejtése:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}.$$

Megjegyzés.

A két formula „csak” az összegzés indexében különbözik egymástól.

Tétel (Determinánsképzés és transzponálás kapcsolata).

Legyen A négyzetes mátrix. Ekkor

$$|A| = |A^T|.$$

Azaz négyzetes mátrixnak és transzponáltjának a determinánsa megegyezik.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Tétel (Dualitási elv).

Ha egy determinánsokra vonatkozó igaz állításban az „oszlop" és „sor" szavakat következetesen felcseréljük, akkor szintén igaz állítást kapunk.

Tétel (Determináns szorzása számmal).

Ha egy determináns valamely sorának minden elemét megszorozzuk egy c valós számmal, akkor a determináns értéke is c-szeresére változik.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 43 \cdot 1 & 43 \cdot 2 & 43 \cdot 82/43 \end{vmatrix} = 43 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 82/43 \end{vmatrix} = 2021.$$

Tétel (Trianguláris mátrix deteminánsa).

Ha egy determináns főátlója felett (alatt) minden elem nulla, azaz egy *trianguláris mátrix* determinánsa, akkor a determináns értéke a főátlójában lévő elemek szorzata.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 43 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 47 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = 43 \cdot 47 \cdot 2 \cdot 1/2 = 2021.$$

Tétel (Sorcsere determinánsban).

Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor értéke (-1)-szeresére változik.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 120$$

Tétel (Determináns $= 0$ — **elegendő feltétel**).

A determináns értéke nulla, ha

- valamely sorának [oszlopának] minden eleme nulla,
- valamely két sora [oszlopa] azonos,
- valamely két sora [oszlopa] arányos.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -9 & -3 & -12 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Tétel (Determináns sorainak kombinálása).

Determináns értéke nem változik, ha valamely sorához egy másik sor c-szeresét hozzáadjuk ($c \in \mathbb{R}$).

Példa.

Ha a lenti determináns 2. sorához hozzáadjuk a 3. sor 2-szeresét, az értéke változatlan marad:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Megjegyzés.

Az előző tételt felhasználva bármely determináns bármely sora, vagy oszlopa „kinullázható" vagyis elérhető, hogy benne legfeljebb egy 0-tól különböző elem maradjon.

Példa.

Például a lenti determináns 3. oszlopát ezen oszlop 3. eleme, azaz 1 segítségével, ki tudjuk nullázni, és kifejteni a determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1^* \end{vmatrix}.$$

Példa (folyt.).

Ha a 2. sorból a 3. sor 3-szorosát vonjuk ki, majd az 1. sorból kivonjuk a 3. sor 2-szeresét, akkor a következőt kapjuk :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Ezután a determinánst kifejthetjük az utolsó oszlopa szerint:

$$= 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 1.$$

Tétel (Determinánsok szorzástétele).

Ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor:

$$|AB| = |A| \cdot |B|,$$

azaz azonos méretű négyzetes mátrixok szorzatának determinánsa a determinánsok szorzata.

Tétel (Determináns kifejtése — Ismétlés (20. dia)).

Determináns bármelyik sora, vagy oszlopa szerint kifejthető. A determináns i-edik sora szerint kifejtése:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}.$$

A determináns j-edik oszlop szerinti kifejtése:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}.$$

Megjegyzés.

A két formula „csak” az összegzés indexében különbözik egymástól.

Tétel (A ferde kifejtés tétele).

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ha $i \neq j$, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0,$$

azaz, ha determináns egy sorának az elemeit egy **másik** sorához tartozó adjungáltakkal szorozzuk, és a szorzatokat összeadjuk, akkor 0-t kapunk.

Igaz vagy Hamis?

- Nem minden mátrixnak létezik determinánsa.

Igaz, csak az $(n \times n)$-es mátrixoknak létezik determinánsa.

- Az $(n \times n)$-es egységmátrix determinánsa n.

Hamis, az $(n \times n)$-es egységmátrix trianguláris (sőt diagonális), így a determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata, tehát 1.