Lineáris algebra

(10A103)

Dr. Kátai-Urbán Kamilla

Honlap: https://www.math.u-szeged.hu/~katai/linalkg24/linalea24.html

Jegyzet:

Dormán Miklós, Kátai-Urbán Kamilla: Előadásvázlat

https://www.math.u-szeged.hu/~katai/Linalkg_jegyzet/LinAlgGTK-Elm.pdf

Megyesi László: Lineáris algebra, Polygon (2007)

Követelmények (előadás)

A legalább közepes (3) gyakorlatijegy megajánlott vizsgajegyként is elfogadható*.

A vizsga írásban fog történni, a vizsgadolgozat 100 pontos.
Ponthatárok:

$$\begin{array}{lcr} [0,39] & \rightsquigarrow & \text{elégtelen (1)} \\ [40,55] & \rightsquigarrow & \text{elégséges (2)} \\ [56,73] & \rightsquigarrow & \text{közepes (3)} \\ [74,86] & \rightsquigarrow & \text{jó (4)} \\ [87,100] & \rightsquigarrow & \text{jeles (5)} \end{array}$$

* Az ebben a félévben megszerzett gyakorlati jegyek estén érvényes, ha a Hallgató nem a gyakorlati utóvizsga alapján kapta.

Követelmények (gyakorlat)

- **Gyakorlat:** 100 pontot lehet elérni.
- 24 pont elektronikus tesztekkel (minimum 10 pontot el kell érni).
- $60 = 30 + 30$ pont két zárthelyi dolgozatból.
- További 16 pontot szerezhetnek a gyakorlatokon, a gyakorlatvezetőjük által megadott módon.
- A ponthatárok megegyeznek a vizsga ponthatárával.
- Az egyik zárthelyi dolgozat javítható vagy pótolható, ha elektronikus teszteken legalább 10 pontot elért.
- Az elégtelen (1) gyakorlati jegy gyakorlati utóvizsgán javítható a félév teljes anyagából írt dolgozattal.
- A zárthelyi dolgozatok időpontjai:
    - 1. zárthelyi dolgozat: **2024. március 18-22.** a gyakorlaton.
    - 2. zárthelyi dolgozat: **2024. május 6-10.** a gyakorlaton.
    - Pót/Javító dolgozat: **2024. május 20-24.** héten.
    - Gyakorlati utóvizsga: **2024. május 27-31.** héten.

1. Előadás

Mátrixok

Definíció: mátrix.

Mátrixon, pontosabban $(n \times m)$-es valós mátrixon egy

- **kerek** zárójelek között elhelyezkedő,
- „táblázatot” értünk, melynek n sora és m oszlopa van,
- elemei pedig $\mathbb{R}$ elemei, azaz **valós** számok.

Példa.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1/2 \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

Megjegyzés.

- A *mátrixokat* általában nagybetűkkel jelöljük (A, B, $C, \dots$). Az $A \in \mathbb{R}^{5\times 6}$ mátrix egy 5 sorból és 6 oszlopból álló valós számokat tartalmazó mátrix.
- *Mátrix elemei*: a B mátrix i-edik sorának $j$edik elemére használhatjuk a b_{ij} jelölést, de ugyanezt az elemet $(B)_{ij}$-vel is szokás jelölni. Az elemeket az oszlopokban fentről lefelé, míg a sorokban balról jobbra számozzuk.

$$\mathbb{R}^{n\times m} \ (n, m \in \mathbb{N})$$

($\mathbb{R}$ feletti $(n \times m)$-es mátrixok halmaza)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & b_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

Példa.

Sütöde „termelési" mátrixa

$$\begin{array}{l} \\ \text{kenyér (1 kg)} \\ \text{kifli (8 db)} \\ \text{zsemle (12 db)} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{liszt (kg)} & \text{víz (l)} & \text{só (dkg)} & \text{energia (kWh)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 & 3.0 & 2.4 \\ 0.6 & 0.2 & 2.0 & 2.0 \\ 0.8 & 0.3 & 2.0 & 1.9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sütöde „árfolyam" mátrixa

$$\begin{array}{l} \\ \text{liszt (Ft/kg)} \\ \text{víz (Ft/l)} \\ \text{só (Ft/dkg)} \\ \text{energia (Ft/kWh)} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{dec. 1.} & \text{dec. 2.} & \text{dec. 3.} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 400 & 380 & 420 \\ 25 & 22 & 23 \\ 6 & 7 & 6 \\ 60 & 58 & 56 \end{pmatrix} \end{array}$$

Mennyibe került 1 kg kenyér előállítása december 1-én?

$$
\begin{array}{l}
 \\
\text{kenyér} \\
\text{kifli} \\
\text{zsemle}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
\text{liszt (kg)} & \text{víz (l)} & \text{só (dkg)} & \text{energia (kWh)}
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
0.8 & 0.3 & 3.0 & 2.4 \\
0.6 & 0.2 & 2.0 & 2.0 \\
0.8 & 0.3 & 2.0 & 1.9
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
 \\
\text{liszt} \\
\text{víz} \\
\text{só} \\
\text{energia}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
\text{dec. 1.} & \text{dec. 2.} & \text{dec. 3.}
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
400 & 380 & 420 \\
25 & 22 & 23 \\
6 & 7 & 6 \\
60 & 58 & 56
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Egy kenyér előállítása december 1-én

$$0.8 \cdot 400 + 0.3 \cdot 25 + 3.0 \cdot 6 + 2.4 \cdot 60 = 489.5$$

Ft-ba került.

$$
\begin{array}{c}
\\ \text{kenyér} \\ \text{kifli} \\ \text{zsemle}
\end{array}
\begin{array}{cccc}
\text{liszt} & \text{víz} & \text{só} & \text{energia} \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & \text{liszt} & \text{víz} & \text{só} & \text{energia} \\
\hline
\text{kenyér} & 0.8 & 0.3 & 3.0 & 2.4 \\
\text{kifli} & 0.6 & 0.2 & 2.0 & 2.0 \\
\text{zsemle} & 0.8 & 0.3 & 2.0 & 1.9
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|ccc}
 & \text{dec. 1.} & \text{dec. 2.} & \text{dec. 3.} \\
\hline
\text{liszt} & 400 & 380 & 420 \\
\text{víz} & 25 & 22 & 23 \\
\text{só} & 6 & 7 & 6 \\
\text{energia} & 60 & 58 & 56
\end{array}
$$

Hasonlóképpen számíthatóak ki a következő táblázat elemei.

$$
\begin{array}{l|ccc}
 & \text{dec. 1.} & \text{dec. 2.} & \text{dec. 3.} \\
\hline
\text{kenyér (1 kg)} & 489.5 & 470.8 & 495.3 \\
\text{kifli (8 db)} & 377.0 & 362.4 & 380.6 \\
\text{zsömle (12 db)} & 453.5 & 434.8 & 461.3
\end{array}
$$

Mátrixszorzás

Definíció: mátrixok szorzása — egzisztencia.

Ha A $(n \times m)$-es, B pedig $(m \times k)$-s mátrix, akkor létezik a szorzatuk, $A \cdot B$, amely $(n \times k)$-s mátrix. Más esetben a szorzat nem létezik.

Definíció: mátrixok szorzása — a szorzata elemei.

Ha létezik az $A \cdot B$ szorzatmátrix, akkor az i-edik sorának j-edik elemét a következőképpen kapjuk: összeszorozzuk A i-edik sorának elemeit B j-edik oszlopának megfelelő elemeivel majd az így kapott számokat összeadjuk. („Az A-beli sor és B-beli oszlop skalárisszorzata.")

Példa.

Ha $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$, akkor AB és BA is létezik, de különböző méretűek.

Az AB mátrix 2-dik sorának 3-adik eleme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -33 & 94 \\ 40 & -101 & \boxed{286} \\ 156 & -429 & 1234 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 9 \cdot 4 + 27 \cdot 9 = 286.$$

Definíció: mátrixszorzás.

Legyen A $(n \times m)$-es, B pedig $(m \times k)$-s mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mk} \end{pmatrix}.$$

Ekkor az $A \cdot B$ mátrix $(n \times k)$-s, i-edik sorának j-edik eleme:

$$(A \cdot B)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{t=1}^{m} a_{it} \cdot b_{tj}.$$

Megjegyzés.

MÁTRIXOK SZORZÁSA NEM KOMMUTATÍV!!!

Példa ($A \cdot B$ létezik, de $B \cdot A$ nem létezik.).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix},$$

de

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ NEM LÉTEZIK.}$$

Megjegyzés.

MÁTRIXOK SZORZÁSA NEM KOMMUTATÍV!!!

Példa ($A \cdot B$ és $B \cdot A$ is létezik, de különböző méretűek.).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

de

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés.

MÁTRIXOK SZORZÁSA NEM KOMMUTATÍV!!!

Példa ($A \cdot B$ és $B \cdot A$ is létezik, egyforma méretűek, de mégsem egyenlők.).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},$$

de

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mátrixok összeadása

Definíció: mátrixok összegének létezése.

Ha az A és B mátrixok $(n \times m)$-es mátrixok, akkor összeadhatók. Az összegük is $(n \times m)$-es mátrix lesz. Csak azonos méretű mátrixok adhatók össze.

Definíció: mátrixok összege.

Az összegmátrix i-edik sorának j-edik eleme A i-edik sora j-edik elemének és B i-edik sora j-edik elemének az összege:

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

azaz a mátrixokat elemenként adunk össze.

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

ahol

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1+2, & c_{12} &= (-2)+(-1), \\ c_{21} &= 3+0, & c_{22} &= 4+1, \\ c_{31} &= 2+2, & c_{32} &= 1+4. \end{aligned}$$

Mátrix szorzása skalárral

Megjegyzés.

Skalár = valós szám

Definíció: mátrix skalárszorosa — egzisztencia.

Mindig létezik.

Definíció: mátrix szorzása skalárral.

Az A mátrixot úgy szorzzuk a λ skalárral, hogy A minden elemét megszorozzuk λ-val:

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Példa.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & \sqrt{2} & e^2 \\ 3 & -2 & \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mátrix transzponáltja

Definíció: mátrix transzponáltja — egzisztencia.

Mátrix transzponáltja mindig létezik, $(n \times m)$-es mátrix transzponáltja $(m \times n)$-es.

Definíció: mátrix transzponáltja.

Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopokba.

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Mátrix transzponáltja

Definíció: mátrix transzponáltja — egzisztencia.

Mátrix transzponáltja mindig létezik, $(n \times m)$-es mátrix transzponáltja $(m \times n)$-es.

Definíció: mátrix transzponáltja.

Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopokba.

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Mátrix transzponáltja

Definíció: mátrix transzponáltja — egzisztencia.

Mátrix transzponáltja mindig létezik, $(n \times m)$-es mátrix transzponáltja $(m \times n)$-es.

Definíció: mátrix transzponáltja.

Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopokba.

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Mátrix transzponáltja

Definíció: mátrix transzponáltja — egzisztencia.

Mátrix transzponáltja mindig létezik, $(n \times m)$-es mátrix transzponáltja $(m \times n)$-es.

Definíció: mátrix transzponáltja.

Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopokba.

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Tétel.

Legyenek A, B és C valós mátrixok. Valahányszor az alábbi egyenlőség egyik oldala értelmezett, mindannyiszor a másik oldal is, és ekkor a kapott két mátrix megegyezik.

- $(A+B)+C = A+(B+C)$;
- $A+B = B+A$;
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
- $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$ és $(B+C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$;
- $(A^T)^T = A$;
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Definíció: munkanélküliségi ráta.

A munkanélküliségi ráta a munkanélküliek számának és a munkaerő-állománynak a hányadosa, százalékos formában kifejezve.

Példa.

Egy gazdaságban a munkanélküliek és a dolgozók közötti átmenetet a következő mátrix írja le (1 éves időtávon):

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

A mátrix alapján egy év alatt a dolgozók 80%-a dolgozó marad, 20%-a munkanélkülivé válik, a munkanélkülieknek pedig 60%-a talál munkát és 40%-a marad munkanélküli. Jelenleg 4 000 000 dolgozó és 1 000 000 munkanélküli van. Mekkora lesz a munkanélküliségi ráta 1, 2 és 3 év múlva?

Mekkora lesz a munkanélküliségi ráta 1 év múlva?

A dolgozók és a munkanélküliek száma jelenleg millió főben számolva: $x_0 = 4$ és $y_0 = 1$.
Egy év múlva a dolgozók létszáma: $x_1 = 0,8x_0 + 0,6y_0$, a munkanélküliek létszáma pedig $y_1 = 0,2x_0 + 0,4y_0$, azaz

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.8 \\ 1.2 \end{pmatrix}.$$

A munkanélküliségi ráta: $\frac{y_1}{x_1+y_1} = \frac{1\,200\,000}{5\,000\,000} = 24\%$

Jelölés.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $k \in \mathbb{N}$, ekkor $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ db}}$.

Mekkora lesz a munkanélküliségi ráta 2 év múlva?

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \left(A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) = A^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

A munkanélküliségi ráta: $\frac{y_2}{x_2+y_2}$

Mekkora lesz a munkanélküliségi ráta 3 év múlva?

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \left(A^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) = A^3 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

A munkanélküliségi ráta: $\frac{y_3}{x_3+y_3}$

Definíció: szimmetrikus mátrix.

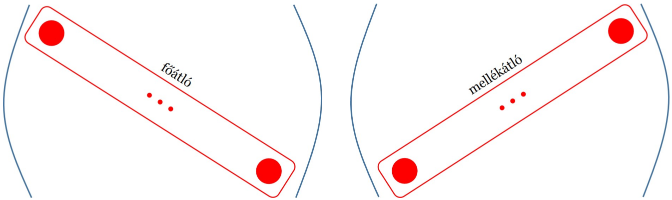
Az A mátrix szimmetrikus, ha megegyezik a transzponáltjával, azaz $A^T = A$.

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés.

Természetesen minden szimmetrikus mátrix négyzetes, azaz $(n \times n)$-es. Az $A = (a_{ij})_{n \times n}$ négyzetes mátrix főátlóját az $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ elemek alkotják.



Definíció: triangulláris mátrix.

Egy $(n \times n)$-es mátrixot triangulárisnak nevezünk, ha a főátlója alatt (vagy felett) minden elem 0.

Példa.

- $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (felső trianguláris mátrix),
- $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ (alsó trianguláris mátrix).

Definíció: diagonális mátrix.

Az $(n \times n)$-es A mátrixot diagonálisnak nevezünk, ha a főátlóján kívüli elemek mind 0-ák (a főátlójában tetszőleges elemek lehetnek).

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Definíció: egységmátrix.

Az $(n \times n)$-es egységmátrix az a diagonális mátrix, amelynek főátlójában minden elem 1. Jele: E_n.

Példa.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés.

Az egységmátrix a mátrixszorzásra nézve úgy viselkedik, mint az 1 valós szám a valós számok szorzására nézve. Bármely $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix esetén

$$E_n \cdot A = A \cdot E_n = A.$$

Definíció: zérómátrix.

Az $(n \times n)$-es zérómátrix az a mátrix, amelynek minden eleme 0. Jele: Z_n vagy 0_n.

Példa.

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés.

A zérómátrix a szorzásra nézve úgy viselkedik, mint a 0 valós szám a valós számok szorzására nézve. Bármely $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix esetén

$$Z_n \cdot A = A \cdot Z_n = Z_n.$$

Igaz vagy Hamis?

- Bármely $(m \times n)$-es mátrix transzponáltja $(m \times n)$-es.

Hamis, $(m \times n)$-es mátrix transzponáltja $(n \times m)$-es.

- Ha egy mátrix szimmetrikus, akkor a főátlójában lévő elemek megegyeznek.

Hamis, pontosan akkor szimmetrikus egy mátrix, ha megegyezik a transzponáltjával, de transzponáláskor a főátló nem változik, tehát tetszőleges elemek szerepelhetnek benne.