1. Feladat. Az $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}$ mátrix egy két ágazatra bontott gazdaság ráfordítási mátrixa. Döntse el, hogy működőképes-e a gazdaság, valamint állapítsa meg, hogy mekkora bruttó kibocsátás tartozik a $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektorral megadott nettó kibocsátáshoz. (x pont)

MEGOLDÁS. Mivel az A mátrix Leontief-inverze: $(E_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 10/3 & 5/3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$, ezért a gazdaság működőképes. A $\mathbf{d}$ nettó kibocsátáshoz $\mathbf{x} = (E_2 - A)^{-1} \cdot \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 25 \\ 45 \end{pmatrix}$ bruttó kibocsátás tartozik.

2. Feladat. Az $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}$ mátrix egy két ágazatra bontott gazdaság ráfordítási mátrixa. Vizsgálja meg, hogy a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ árvektorral számolva mely ágazatok lesznek nyereségesek. Ha a gazdaság működőképes, de nem nyereséges mindkét ágazat, akkor adjon meg olyan árvektort, hogy mindkettő nyereséges legyen. (x pont)

MEGOLDÁS. Mivel $\mathbf{v} \cdot (E_2 - A) = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.6 \end{pmatrix}$, ezért az első ágazat veszteséges, a második pedig nyereséges.

Legyen $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$. Pontosan akkor nyereséges mindkét ágazat, ha $x > 0$ és $\frac{x}{2} < y < x$. Pl. a $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$ esetén mindkét ágazat nyereséges.

3. Feladat. Döntse el, hogy a v vektor eleme-e az $\mathbb{R}^4$ vektortér U alterének. Amennyiben $v \in U$, akkor állítsa elő a v vektort az U alteret generáló vektorok lineáris kombinációjaként.

(a) $v = (1, 2, 5, 2)$, $U = [(-1, 0, 1, 2), (0, 1, 3, 2)]$;

(b) $v = (2, 0, 2, 2)$, $U = [(1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 0), (1, 2, 0, 0), (1, 0, 0, 8)]$.

(x pont)

MEGOLDÁS.

(a) $v \in U$ és $v = (-1) \cdot (-1, 0, 1, 2) + 2 \cdot (0, 1, 3, 2)$;

(b) $v \notin U$.

4. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér alábbi vektorrendszereinek rangját, és döntse el, hogy lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e az $\mathbb{R}^4$ vektortérben.

(a) $(2, -3, -2, 3), (1, -2, -1, 0), (-1, 2, 1, -2), (0, 1, 0, -3)$;

(b) $(1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 1), (3, 4, 1, 2), (4, 1, 2, 3)$.

(x pont)

MEGOLDÁS.

(a) A vektorrendszer rangja 3, lineárisan függő, nem generátorrendszer, nem bázis.

(b) A vektorrendszer rangja 4, lineárisan független, generátorrendszer, bázis.

5. Feladat. Döntse el az a valós paraméter függvényében, hogy a $V = \mathbb{R}^4$ vektortér alábbi vektorrendszere lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e az $\mathbb{R}^4$ vektortérben.

$$(1, -1, 2, 3), (2, -1, 3, 7), (1, -1, a^2 + a, 4), (1, -1, 2, a^2 + 2)$$

(x pont)

MEGOLDÁS. A vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független / generátorrendszer / bázis, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$.

6. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér U alterének dimenzióját, valamint adjon meg benne bázist.

(a) $U = [(-4,-1,1,-3),(5,4,7,12),(1,1,2,3),(2,1,1,3)]$;

(b) $U = [(1,0,1,0),(1,1,2,3),(1,4,5,8),(5,8,13,21)]$.

(x pont)

MEGOLDÁS.

(a) $\dim(U) = 2$, egy bázis U-ban: $(1,1,2,3),(2,1,1,3)$;

(b) $\dim(U) = 3$, egy bázis U-ban: $(1,0,1,0),(1,1,2,3),(1,4,5,8)$.

7. Feladat. Adja meg a v vektor koordinátasorát a V vektortér megadott bázisában:

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $v = (1,3)$, bázis: $(-2,3),(1,0)$;

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (3,0,1)$, bázis: $(1,-2,1),(3,0,-1),(3,3,3)$.

(x pont)

MEGOLDÁS. (a) $v = 1\cdot(-2,3) + 3\cdot(1,0)$, így v koordinátasora $(1,3)$;
(b) $v = \frac{1}{2}\cdot(1,-2,1) + \frac{1}{2}\cdot(3,0,-1) + \frac{1}{3}\cdot(3,3,3)$, így v koordinátasora $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$.

8. Feladat. Határozza meg az alábbi mátrixok rangját, valamint adjon meg bennük egy maximális méretű nemnulla aldeterminánst:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$; (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

(x pont)

MEGOLDÁS. (a) $r(A) = 1$, $|1| \neq 0$;
(b) $r(B) = 2$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

9. Feladat. Határozza meg az A mátrix rangját az a valós paraméter függvényében.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & a^2+a & 2 \\ 3 & 7 & 4 & a^2+2 \end{pmatrix}$$

(x pont)

MEGOLDÁS. Az A mátrix rangja 3, ha $a \in \{-2,-1,1\}$; minden más esetben 4 a rang.

10. Feladat. Adjon meg bázist a következő homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterében.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

(x pont)

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszer általános megoldása:

$$U = \{(-1/2x_4 - 10/3x_5, -x_4 - 1/3x_5, -1/2x_4 + 5/3x_5, x_4, x_5) : x_4, x_5 \in \mathbb{R}\},$$

a megoldástér egy bázisa:

$$(-1/2,-1,-1/2,1,0),(-10/3,-1/3,5/3,0,1).$$

11. Feladat. Határozza meg az alábbi mátrixok sajátértékeit.

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

(x pont)

MEGOLDÁS.

(a) $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 3$;

(b) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 5$.

12. Feladat. Adjon meg bázist az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterében.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2$; (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1$.

$(x \text{ pont})$

$\boxed{\text{Megoldás.}}$

(a) $(-1, 0, 1)$, $(-1, 2, 0)$;

(b) $(1, 0, 1)$, $(-2, 1, 0)$.

Megjegyzés: Akár a 11.(a) és 12.(b) feladat együtt is alkothat egy zh feladatot.

13. Feladat. Hozza kanonikus alakra a V vektortéren értelmezett valós kvadratikus alakokat, és határozza meg az osztályukat (pozitív/negatív (szemi)definit, indefinit).

$$V = \mathbb{R}^3, \quad x_1^2 - 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_2x_3.$$

$(x \text{ pont})$

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Pozitív szemidefinit, kanonikus alak: y_1^2.