1. Feladat. Az $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}$ mátrix egy két ágazatra bontott gazdaság ráfordítási mátrixa. Döntse el, hogy működőképes-e a gazdaság, valamint állapítsa meg, hogy mekkora bruttó kibocsátás tartozik a $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektorral megadott nettó kibocsátáshoz. (x pont)

2. Feladat. Az $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}$ mátrix egy két ágazatra bontott gazdaság ráfordítási mátrixa. Vizsgálja meg, hogy a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ árvektorral számolva mely ágazatok lesznek nyereségesek. Ha a gazdaság működőképes, de nem nyereséges mindkét ágazat, akkor adjon meg olyan árvektort, hogy mindkettő nyereséges legyen. (x pont)

3. Feladat. Döntse el, hogy a v vektor eleme-e az $\mathbb{R}^4$ vektortér U alterének. Amennyiben $v \in U$, akkor állítsa elő a v vektort az U alteret generáló vektorok lineáris kombinációjaként.

(a) $v = (1, 2, 5, 2)$, $U = [(-1, 0, 1, 2), (0, 1, 3, 2)]$;

(b) $v = (2, 0, 2, 2)$, $U = [(1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 0), (1, 2, 0, 0), (1, 0, 0, 8)]$.

(x pont)

4. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér alábbi vektorrendszereinek rangját, és döntse el, hogy lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e az $\mathbb{R}^4$ vektortérben.

(a) $(2, -3, -2, 3), (1, -2, -1, 0), (-1, 2, 1, -2), (0, 1, 0, -3)$;

(b) $(1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 1), (3, 4, 1, 2), (4, 1, 2, 3)$.

(x pont)

5. Feladat. Döntse el az a valós paraméter függvényében, hogy a $V = \mathbb{R}^4$ vektortér alábbi vektorrendszere lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e az $\mathbb{R}^4$ vektortérben.

$$(1, -1, 2, 3), (2, -1, 3, 7), (1, -1, a^2 + a, 4), (1, -1, 2, a^2 + 2)$$

(x pont)

6. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér U alterének dimenzióját, valamint adjon meg benne bázist.

(a) $U = [(-4, -1, 1, -3), (5, 4, 7, 12), (1, 1, 2, 3), (2, 1, 1, 3)]$;

(b) $U = [(1, 0, 1, 0), (1, 1, 2, 3), (1, 4, 5, 8), (5, 8, 13, 21)]$.

(x pont)

7. Feladat. Adja meg a v vektor koordinátasorát a V vektortér megadott bázisában:

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $v = (1, 3)$, bázis: $(-2, 3), (1, 0)$;

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (3, 0, 1)$, bázis: $(1, -2, 1), (3, 0, -1), (3, 3, 3)$.

(x pont)

8. Feladat. Határozza meg az alábbi mátrixok rangját, valamint adjon meg bennük egy maximális méretű nemnulla aldeterminánst:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$; (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

(x pont)

9. Feladat. Határozza meg az A mátrix rangját az a valós paraméter függvényében.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & a^2+a & 2 \\ 3 & 7 & 4 & a^2+2 \end{pmatrix}$$

(x pont)

10. Feladat. Adjon meg bázist a következő homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterében.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

(x pont)

11. Feladat. Határozza meg az alábbi mátrixok sajátérékeit.

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

(x pont)

12. Feladat. Adjon meg bázist az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterében.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1$.

(x pont)

Megjegyzés: Akár a 11.(a) és 12.(b) feladat együtt is alkothat egy zh feladatot.

13. Feladat. Hozza kanonikus alakra a V vektortéren értelmezett valós kvadratikus alakokat, és határozza meg az osztályukat (pozitív/negatív (szemi)definit, indefinit).

$$V = \mathbb{R}^3, \quad x_1^2 - 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_2x_3.$$

(x pont)